

令和 6 年 6 月 25 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03203

研究課題名(和文)有限次元超代数の原始冪等元が生成する射影直既約加群の構造の決定

研究課題名(英文)The determination of the structure of projective indecomposable modules generated by primitive idempotents of finite-dimensional hyperalgebras

研究代表者

吉井 豊 (Yutaka, Yoshii)

茨城大学・教育学部・准教授

研究者番号：90613141

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：自身の過去の研究によって、正標数の体 k 上の代数群 $G=SL(2,k)$ の第 r Frobenius核 G_r の超代数 $\text{Dist}(G_r)$ における、原始冪等元を含むある種の元(以下 $B(\) (a,j)$ で表す)が得られている。これらの元を用いて、 $\text{Dist}(G_r)$ のJacobson根基のある基底や生成系を構成することに成功した。また、一般の単連結な単純代数群 G に対する G_r の超代数 $\text{Dist}(G_r)$ の生成元も構成でき、さらに、 $\text{Dist}(G_r)$ やその主要な部分多元環について、Frobenius写像に関連したある線形写像を用いて、環の積によっていくつかの線形同型写像が定まることもわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究において、申請者の先行研究によって得られた、 $G=SL(2,k)$ の第 r Frobenius核 G_r の超代数 $\text{Dist}(G_r)$ の原始冪等元を含む元 $B(\) (a,j)$ たちを用いて、 $\text{Dist}(G_r)$ における環論的な性質をいくつか記述することに成功した。学術的意義としては、今回の研究成果が一般の半単純代数群 G (およびその第 r Frobenius核 G_r)の表現論における新たな研究手法を確立するための第一歩となり得ること、さらにその結果や考え方が関連する代数に応用できる可能性があることである。

研究成果の概要(英文)：Through my previous research, certain elements (denoted as $B(\) (a,j)$ hereafter) including primitive idempotents in the hyperalgebra $\text{Dist}(G_r)$ of the r -th Frobenius kernel G_r of the algebraic group $G=SL(2,k)$ over a field k of positive characteristic have been obtained. Using these elements, I succeeded in constructing certain bases and generating sets of the Jacobson radical for $\text{Dist}(G_r)$. Moreover, I succeeded in constructing generators for the hyperalgebra $\text{Dist}(G_r)$ of the Frobenius kernel G_r for a general simply connected simple algebraic group G , and further, using a linear map associated with the Frobenius map, it was found that several linear isomorphisms are determined by the product of rings for $\text{Dist}(G_r)$ and its major subalgebras.

研究分野：有限群および代数群のモジュラー表現論

キーワード：代数群の表現論 モジュラー表現論 原始冪等元 射影直既約加群 有限次元多元環

1. 研究開始当初の背景

一般に、有限次元 k 代数 A の表現論の研究においては射影直既約加群の構造を決定することが最も重要な問題の1つである。単位元の原始冪等元分解を具体的な形で与えることができれば、射影 A -加群 A の直既約分解が得られ、さらに射影直既約 A -加群が全て得られるため非常に有意義である。一方で、正標数 p の体 k 上の半単純代数群 G の表現論は、有限 Chevalley 群、Lie 代数、量子群および Hecke 代数の表現論や、組合せ論など他の様々な領域と密接な関わりがあり、現在も世界中で活発に研究が進められている。さて、半単純代数群 G の第 r Frobenius 核 G_r の超代数 $\text{Dist}(G_r)$ の表現論の研究は、 G の表現論 (あるいはその超代数 $\text{Dist}(G)$ の表現論) を研究する上で欠かせないが、 $\text{Dist}(G_r)$ は有限次元 k 代数であるため、単位元の原始冪等元分解が記述できれば射影直既約加群などの主要な加群を構成できる。現在に至るまで、 $\text{Dist}(G_r)$ の単位元の原始冪等元分解はほとんど何も知られておらず、射影 $\text{Dist}(G_r)$ -加群の構成は第 r Steinberg 加群 St_r と他の既約加群とのテンサー積に頼らざるを得なかったのが実情である。この方法でも、テンサー積の直和分解は一般に難しく、射影直既約加群やその構造を得るのは容易ではない。

このような状況の中で申請者は最近、正標数 p の体 k 上の最も単純な半単純代数群である 2 次の特殊線形群 $G=\text{SL}(2,k)$ の第 r Frobenius 核 G_r に付随する有限次元超代数 $\text{Dist}(G_r)$ において、単位元の原始冪等元分解を具体的な式で記述することに成功した。さらに、こうして得られた原始冪等元は、 $\text{Dist}(G_r)$ の次数 0 の元全体のなす部分代数 A_r の原始冪等元にもなるが、それぞれの原始冪等元で生成される射影直既約 A_r -加群の構造を記述することにも成功した。

2 次の特殊線形群 $G=\text{SL}(2,k)$ は最も簡単な半単純代数群であるが、全ての半単純代数群の基礎をなす群でもあるので、それに対応する有限次元超代数 $\text{Dist}(G_r)$ の単位元の原始冪等元分解が具体的に記述できたことは非常に重要であり、より大きな半単純代数群 G に対する $\text{Dist}(G_r)$ の単位元の原始冪等元分解、さらには射影直既約加群の構造を知る手がかりとなることが期待される。

2. 研究の目的

本研究の目的は、申請者の先行研究によって得られた、 $G=\text{SL}(2,k)$ の第 r Frobenius 核 G_r の超代数 $\text{Dist}(G_r)$ の原始冪等元によって生成される射影直既約 $\text{Dist}(G_r)$ -加群の構造を記述することで、一般の半単純代数群 G (およびその第 r Frobenius 核 G_r) の表現論における新たな研究方法を確立するための第一歩とすることであった。

3. 研究の方法

本研究においては、申請者が先行研究において構成した、 $G=\text{SL}(2,k)$ の第 r Frobenius 核 G_r の超代数 $\text{Dist}(G_r)$ のある元たち $B^{(j)}(a, j)$ (これらのうちのいくつかは原始冪等元) を用いて、 $\text{Dist}(G_r)$ における様々な環論的性質を記述するという手法を取った。本研究の特徴としては、次の点がある。

(1) 超代数 $\text{Dist}(G_r)$ の内部のみで $\text{Dist}(G_r)$ の表現論が展開でき、しかも純代数的に扱える。これまで、 $\text{Dist}(G_r)$ の表現論を展開する際には、もとの代数群 G の幾何学的な情報を用いて G (または G の超代数 $\text{Dist}(G)$) の加群を構成し、それを $\text{Dist}(G_r)$ に制限して得られる $\text{Dist}(G_r)$ -加群を用いて研究するのが通常であったが、既約加群や誘導加群は構成できる反面、射影加群を構成

するのは容易ではなかった。一方、本研究の手法では、幾何学的な道具は一切用いず、 $\text{Dist}(G_r)$ の内部における環の演算のみを用いて、主要な加群の1つである射影直既約 $\text{Dist}(G_r)$ -加群を構成することが可能であり、扱いやすくなる。

(2) もとの代数群 G の加群の構成やその構造の研究に役立つ可能性がある。実際に、射影直既約 $\text{Dist}(G_r)$ -加群や既約 $\text{Dist}(G_r)$ -加群は、(一部の例外を除き) $\text{Dist}(G)$ -加群(よって G -加群)を制限して得られることがわかっている。今後、原始冪等元で生成される射影直既約 $\text{Dist}(G_r)$ -加群を何らかの方法で拡張して $\text{Dist}(G)$ -加群を構成することができれば、代数群 G そのものの表現論の研究ができるようになり、それによって有限 Chevalley 群の定義標数の体上のモジュラー表現論の研究も可能になる。

(3) 本研究の手法が、関連する他の対象にも利用できる可能性がある。例えば、超代数 $\text{Dist}(G_r)$ の表現論は、1の冪根に対する量子群の表現論と類似しており、本研究の手法が有用であることが期待される。

4. 研究成果

(1) 代数群 $G=\text{SL}(2, k)$ に対して、元 $B^{(r)}(a, j)$ で生成される $\text{Dist}(G_r)$ -加群のある種の基底を構成した。それによって、その加群の頭と台がともに同型な既約加群であることを示した。今後はこの加群の構造をさらに詳しく研究する予定である。また、元 $B^{(r)}(a, j)$ たちの性質を用いて、 $\text{Dist}(G_r)$ の Jacobson 根基の生成系を見つけることができた。この結果は 1983 年に Wong が $r=1$ の場合に得た結果の一般化であり、全ての自然数 r に対して成り立つ結果であるという点で有意義である。

(2) 一般の単連結単純代数群 G に対して、 G_r の Borel 部分群 B_r のべき単根基 U_r に対応する $\text{Dist}(G_r)$ の部分多元環 $\text{Dist}(U_r)$ のある種の生成系を決定した。この結果を出す過程で、対応する普遍包絡代数においてある交換公式が得られ、その公式が大いに役立った。また、 $\text{Dist}(G)$ 上の Frobenius 自己準同型写像を split する線形写像を用いて、 $\text{Dist}(G)$ やその部分多元環において、積によって定義される線形同型写像を導くことができた。この結果については、特殊な場合 $G=\text{SL}(2, k)$ での $\text{Dist}(G_r)$ において元 $B^{(r)}(a, j)$ を構成する過程で用いた線形同型写像からヒントを得たものであり、一般の G に対する $\text{Dist}(G)$ や $\text{Dist}(G_r)$ の表現論の研究に役立つことが期待できる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yutaka Yoshii	4. 巻 21
2. 論文標題 A basis of a certain module for the hyperalgebra of $(SL_2)_r$ and some applications	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219498822501845	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yutaka Yoshii	4. 巻 32
2. 論文標題 Some results on certain finite-dimensional subalgebras of the hyperalgebra of a universal Chevalley group	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Lie Theory	6. 最初と最後の頁 899-916
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshii Yutaka	4. 巻 9
2. 論文標題 Generating sets of the Jacobson radical of the hyperalgebra of $(SL_2)_r$	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Computational Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jaca.2024.100011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yoshii Yutaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Certain linear isomorphisms for hyperalgebras relative to a Chevalley group	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219498825501853	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 吉井 豊
2. 発表標題 単純代数群の超代数のある部分代数に関するいくつかの結果
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 吉井 豊
2. 発表標題 超代数 $\text{Dist}((\text{SL}_2)_r)$ のある種の加群の構造について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 吉井 豊
2. 発表標題 超代数 $\text{Dist}(\text{SL}_{\{2, r\}})$ のJacobson根基の生成系
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------