

令和 3 年 5 月 20 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03205

研究課題名(和文) 量子可積分系の代数解析的手法による対称関数の研究

研究課題名(英文) Studies on symmetric functions by algebraic analysis of quantum integrable models

研究代表者

茂木 康平 (Motegi, Kohei)

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：30583033

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：Izergin-Korepin法を用いて可解格子模型の分配関数とsymplectic Schur関数、Whittaker関数のfactorial版、楕円パフィアン、楕円対称関数の対応を明らかにした。また、分配関数と対称関数、特殊関数の対応の応用としてWhittaker関数の双対Cauchy公式や楕円パフィアンの双対公式などの恒等式を導出した。また、Yang-Baxter代数を用いて恒等式や代数幾何の押し出し公式を導出した。この他に格子経路、分配関数、Yang-Baxter代数、確率論を用いて双対Grothendieck多項式に関する種々の公式を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対称関数、特殊関数は数理物理、数学における重要な研究対象であり、その性質を可積分系の観点や手法を用いて研究した。可積分系の観点を取り入れることにより、伝統的な手法だけでは捉えられなかったことを捉えることができるようになる。例えば新たな恒等式、公式の導出である。また、関連する代数幾何への応用や、確率論の観点も取り入れて研究することができ、可積分系と数学の他分野との相互作用に貢献できたのではないかと考えている。

研究成果の概要(英文)：By developing the Izergin-Korepin analysis, we analyzed various partition functions of integrable lattice models and determined their exact forms which are given by factorial versions of symplectic Schur functions, Whittaker functions, elliptic Pfaffians, elliptic multivariable functions. Using the correspondence between partition functions and special functions, we derived identities, dual Cauchy formulas for Whittaker functions, duality between elliptic Pfaffians, for example.

Using Yang-Baxter algebra, we also rederived identities recently discovered and also made application to pushforward formulas in algebraic geometry. We also derived identities and formulas for refined dual Grothendieck polynomials by using partition functions, Yang-Baxter algebra and probability theory.

研究分野：量子可積分系

キーワード：量子可積分系 対称関数 可解確率過程 数え上げ幾何 組合せ論

1. 研究開始当初の背景

近年、量子可積分系、可解格子模型の分配関数と対称関数の関係、及びその対応に基づく対称関数の研究や他分野への応用が盛んになってきている。研究が盛んになっている理由の一つとしては数え上げ幾何、保型表現論、確率過程とも関連が深いことがあり、近年重要性を増している研究テーマである。量子可積分系の代数解析的手法の開発及び、対称関数、特殊関数への応用が研究開始当初の背景、目的であった。

2. 研究の目的

量子可積分系、可解格子模型の分配関数で最も基本的なものの一つとして、Bethe 波動関数と呼ばれるものがある。元々は量子可積分系の分野を創始した Bethe により、座標的 Bethe 仮説と呼ばれる Bethe 自身が考案した Hamiltonian を対角化する手法により、on-shell Bethe 波動関数の形は知られていた。座標的 Bethe 仮説では、スペクトル変数が Bethe 方程式と呼ばれる拘束条件を満たすことが必要であり、Bethe 波動関数はその拘束条件を満たす必要がある。Yang や Baxter による Yang-Baxter 方程式の導入を経て、Faddeev らの Leningrad スクールは量子逆散乱法、あるいは代数的 Bethe 仮説と呼ばれる手法を創始した。この方法では Bethe 波動関数を R 行列と呼ばれる Yang-Baxter 方程式の解を用いて代数的に構成することもできる。量子可積分系の物理量を計算する上では、Bethe 波動関数の具体的な形が分からなくてもよい場合が大半なのであるが、近年、数学的側面から重要性を増している。特に数え上げ幾何、保型表現論、確率過程との関連が深いことが明らかになってきている。1 例としては、申請者が堺和光氏との研究で明らかにした 5 頂点模型や可解ボソン模型の波動関数と Grothendieck 多項式の対応である。また、数論のグループらによってスーパー量子群の R 行列から構成される波動関数と Whittaker 関数との関連も明らかになってきている。他にも確率過程への応用が確率論の研究者によってなされているが、これらの研究では、スペクトル変数の間に Bethe 方程式を課さない off-shell Bethe 波動関数を考えるのが通常である。つまり、座標的 Bethe 仮説ではなく、量子逆散乱法による観点から解析することが必須である。また、これまでの量子逆散乱法、代数的 Bethe 仮説では Bethe 方程式を満たすことを仮定して解析している研究が大半である。この仮定を置くことで計算が劇的に簡易化されることが理由の一つなのであるが、この仮定をおいてしまうと、対称関数、数え上げ幾何、保型表現論、確率過程への応用が殆ど期待できない。Bethe 方程式を仮定しない量子逆散乱法の手法の発展、また、数学の諸分野への応用が研究の目的である。

3. 研究の方法

これまで off-shell Bethe 波動関数の明示的表式を求める手法はいくつか提案されてきたが、個々の模型の特殊性に依存したものも多い。本研究開始の前年度に申請者は Izergin-Korepin 法と呼ばれる、元々 Korepin と Izergin によって導入されたドメイン壁分配関数の解析手法が off-shell Bethe 波動関数に拡張できることを見出した。量子可積分系や可解格子模型では各表現空間にスペクトル変数を導入することができる。また、量子空間と補助空間と呼ばれる 2 種類の空間が存在するが、最終的に対称関数の対称変数に対応するのは、波動関数を構成する補助空間のスペクトル変数である。しかしながら、波動関数の Izergin-Korepin 解析において重要なことは、対称変数が住んでいる補助空間の方ではなく、量子空間のスペクトル変数に関する多変数多項式とみなすことにある。これは量子空間と補助空間が対等の役割を果たすドメイン壁分配関数では重要なことではないが、一般には対等でなくなる波動関数になって初めて認識できることである。この観点を認識することにより、漸化式を 2 通りに場合分けして構成することで、Izergin-Korepin 解析が波動関数の場合にも適用できることがわかった。この手法は境界条件の変種や楕円量子可積分系への拡張にも対応できる、汎用性のある解析手法といえる。この手法を種々の R 行列や、反射壁境界条件をはじめとする種々の変種に拡張し、明示的表示を対称関数で表すこと、また、この対応を用いて対称関数の恒等式を導出する。

4. 研究成果

当初想定していた研究だけでなく、高ランク楕円可積分系の解析、代数幾何への応用、確率論からの対称関数の研究も行った。以下が具体的な研究成果である。

Izergin-Korepin 法を用いて、一般化 Felderhof 模型の反射境界条件下での波動関数の解析を行った。通常の Felderhof 模型の L 演算子を一般化したものを考え、また 2 種類の K 行列に対応して定義される波動関数がそれぞれ symplectic Schur 関数及び、Bump-Friedberg-Hoffstein によって導入された Whittaker 関数の一般化 (factorial 版への拡張) になることを示した。この結果は一方の K 行列の場合に関しては Hamel-King, Ivanov の研究結果の拡張になっており、また、もう一方の K 行列の場合には Brubaker-Bump-Chinta-Gunnells の予想を、一般化した波動関数の表式を導出することで解決したとみなせる。また、その応用として、一般化 symplectic Schur 関数と、Bump-Friedberg-Hoffstein の Whittaker 関数の双対 Cauchy 公式を導出した。

ドメイン壁分配関数の変種を楕円量子可積分系の場合に解析した。具体的には Kuperberg によって導入された種々の変種のうち、OS 境界と呼ばれているものを解析した。楕円版の Izergin-Korepin 法により、1 つの分配関数に対して 2 種類の楕円パフィアンを用いた表示を導出した。系として、楕円パフィアンに関する双対公式を導出した。

楕円量子可積分系と楕円対称関数の研究を行った。最近、Foda-Manabe により、超対称ゲージ理論の観点から有理型、三角型の高ランク模型における nested off-shell Bethe 波動関数を一般化した分配関数が導入され、その明示的表示が書き下された。まず代数解析的手法により、彼らの表示を確かめた。更に高ランクの楕円面模型で最も基本的なもの、即ち $N=3$ 楕円 R 行列を用いて Foda-Manabe の分配関数の楕円類似に相当する分配関数を導入し、楕円型の Izergin-Korepin 解析の nested 版を構築することで解析を行い、その明示的表示を得た。得られた結果の特別な場合は Rimanyi-Tarasov-Varchenko, Konno, Felder-Rimanyi-Varchenko の楕円ウェイト関数になることを確かめた。

頂点模型の Yang-Baxter 代数を用いた恒等式、代数幾何の研究を行った。最近、Guo-Sun により、Feher-Nemethi-Rimanyi による Schur 多項式に関する恒等式が factorial Grothendieck 多項式に拡張された。その恒等式に対し、以前行った頂点模型と波動関数の対応を用いた別証を与えた。鍵となるのは Shigechi-Uchiyama によって導出された Yang-Baxter 代数の多重交換関係式である。更に、この関係式が Grassmann 束の Grothendieck 群の Grothendieck 類から非特異多様体の Grothendieck 群の Grothendieck 類への Atiyah-Bott 型局所化公式との類似性があることに気づき、その類似性を利用して、Grothendieck 類の押し出し写像に関する新たな公式を書き下した。得られた公式の特別な場合は、Buch の押し出し公式の特別な場合にも相当することを確認した。

Refined Grothendieck 多項式及び、refined dual Grothendieck 多項式と呼ばれる対称多項式に関して Queensland 大学の Travis Scrimshaw 氏と共同研究を行った。Dual Grothendieck 多項式とは Schubert 多様体の K 理論における多項式代表である Grothendieck 多項式の双対基底であるが、パラメータをより含んだ refined dual Grothendieck 多項式が Galashin-Grinberg-Liu によって導入された。この refined dual Grothendieck 多項式を可積分系や組合せ論の観点から研究し、種々の公式を導出した。まず Lascoux-Naruse による lattice path による dual Grothendieck 多項式の構成が refined dual Grothendieck 多項式に持ち上がることを利用し、lattice path の様々な評価方法を利用して Littlewood 公式や Cauchy 公式等を導出した。また、lattice path を可解格子模型の分配関数として読み替え、Yang-Baxter 代数を利用することで新たな恒等式を導出した。また、last passage percolation と呼ばれる可解確率過程のある確率が dual Grothendieck 多項式で表されるという Yeliussizov の結果を拡張し、パラメータをより多く含む場合の last passage percolation 模型の確率と refined dual Grothendieck 多項式の対応を RSK 対応によって証明した。また、その系として歪 dual Grothendieck 多項式を遷移確率として導入することで、Jacobi-Trudi 公式や Cauchy 公式の確率論的導出を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kohei Motegi	4. 巻 61
2. 論文標題 A class of partition functions associated with $E_{\tau, \eta}(g_3)$ by Izergin-Korepin analysis	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 53507
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5129567	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Motegi, Kazumitsu Sakai, Satoshi Watanabe	4. 巻 149
2. 論文標題 Quantum inverse scattering method and generalizations of symplectic Schur functions and Whittaker functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 103571
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2019.103571	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Motegi	4. 巻 954
2. 論文標題 Integrability approach to Feher-Nemethi-Rimanyi-Guo-Sun type identities for factorial Grothendieck polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nuclear Physics B	6. 最初と最後の頁 114998
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.nuclphysb.2020.114998	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Motegi, Kazumitsu Sakai	4. 巻 1194
2. 論文標題 Izergin-Korepin approach to symmetric functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 12077
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1742-6596/1194/1/012077	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Motegi	4. 巻 109
2. 論文標題 Elliptic free-fermion model with OS boundary and elliptic Pfaffians	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 923 - 943
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-018-1130-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Kohei Motegi
2. 発表標題 Izergin-Korepin method to elliptic identities
3. 学会等名 Elliptic integrable systems, special functions and quantum field theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kohei Motegi
2. 発表標題 Izergin-Korepin approach to symmetric functions
3. 学会等名 Group 32 (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストラリア	The University of Queensland			