

令和 6 年 4 月 13 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03210

研究課題名（和文）多変数モジュラー形式の数論的、幾何学的及びp進的应用

研究課題名（英文）Arithmetic, geometric and p-adic applications of multivariable modular forms

研究代表者

山名 俊介（Yamana, Shunsuke）

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50633301

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：(1) バランス型4変数3重積p進L関数を構成し、p通常楕円曲線の3重積モチーフの円分p進L関数の例外零点予想を証明した。(2)  $GL(2)$ の保型表現の3重積L関数の中心値と周期積分の関係式は中心指標の積が自明指標であるとき知られている。この式を中心指標の積が二次指標である場合に拡張した。(3) Hilbert-Eisenstein級数の対角制限を計算し、あるp進L関数の微分値とStark-Heegner点のp進対数の関係式を導いた。(4) コンパクトなユニタリ群の直積 $U(3) \times U(2)$ のp進L関数を構成した。(5) 準分裂ユニタリ群の直積 $U(2, 1) \times U(1, 1)$ のp進L関数を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

L関数とモジュラー形式には、複素数体をp進体に取り替えた類似物も存在し、p進L関数やp進モジュラー形式と呼ばれます。p進L関数を用いて、L関数の数論的性質をp進的視点から考えることが岩澤理論です。p進数の新しい側面として複素数で離散的なパラメータがp進数では連続的となり、Eisenstein級数以外にも肥田族などp進モジュラー形式の連続族が存在し、複素変数に類似した円分変数の他に、反円分変数や連続族のパラメータを加えた多変数p進L関数など様々なタイプのp進L関数を考えられることがあります。本研究では、3重積L関数などの多変数p進L関数を構成し、その例外零点や微分値を考察しました。

研究成果の概要（英文）：(1) We construct the four-variable p-adic triple product L-functions associated to three Hida families of elliptic modular forms. As an application we prove the exceptional zero conjecture for the triple product of p-ordinary elliptic curves. (2) When the product of the central character is trivial, Atsushi Ichino proved a formula for the central value of the triple product L-series in terms of a period integral. We extend this formula to the case when the product of the central character is a quadratic character. (3) We compute the restriction of Hilbert-Eisenstein series and prove a relation between the first derivative of a certain p-adic L-function and the p-adic logarithm of a Stark-Heegner point. (4) We construct a five-variable p-adic L-function attached to Hida families on the denite unitary groups  $U(3)$  and  $U(2)$  by using the Ichino-Ikeda formula. (5) We also construct a five-variable p-adic L-function attached to Hida families on the quasi-split unitary groups  $U(2, 1)$  and  $U(1, 1)$ .

研究分野：数論

キーワード：モジュラー形式 L関数 p進L関数 志村多様体 肥田族 市野-池田公式 積分表示 周期積分

## 1. 研究開始当初の背景

現代数学の重要なテーマに、L 関数あるいは 関数と呼ばれる複素関数の研究があります。例えば、素数分布の解明に 関数の零点に関する Riemann 予想が決め手になることが知られています。代数多様体や保型形式に付随する L 関数を構成し、L 関数の特殊値や微分値を数論的不変量に結び付ける公式は数論の中心的課題です。古くは Dirichlet の類数公式があり、その楕円曲線版は BSD 予想と呼ばれています。これらの予想はクレイ数学研究所が 2000 年に発表したミレニアム懸賞問題の中の 2 つであり、多くの数学者を魅了し続けています。

一方、モジュラー形式とは大雑把に言えば、対称空間上の非常に高い対称性を持つ関数です。Langlands は群作用でモジュラー形式が生成する表現の解析を目的とする保型表現論を創始し、保型表現と Galois 表現のような数論的パラメータに対応があると予想しました。これは Langlands 対応と呼ばれ、近年の跡公式の発展により古典群の場合にほぼ確立されるなど、保型表現論は急速に発展しています。Langlands 対応を架け橋にして、モジュラー形式には、調和解析、代数、幾何、数論が L 関数を要に複雑に結び付いています。

モジュラー形式の部分群上の積分は周期と呼ばれます。周期は表現の分岐則に関わり、ときにコホモロジーと関連し、L 関数の特殊値に現れることもあります。これは周期公式と呼ばれ、L 関数を表現論や幾何に関係付けます。Gan、Gross と Prasad の一般的な周期に関する予想を京都大学の市野篤史と池田保は明示的に定式化し、市野-池田予想と呼ばれています。最近、市野-池田予想はユニタリ群の場合に Beuzart-Plessis らにより相対跡公式を用いて解決されました。周期公式は次に述べる  $p$  進 L 関数や岩澤理論にも幅広い応用があります。

L 関数とモジュラー形式には、複素数体を  $p$  進体に取り替えた類似物も存在し、 $p$  進 L 関数や  $p$  進モジュラー形式と呼ばれます。 $p$  進 L 関数を用いて、L 関数の数論的性質を  $p$  進的視点から考えることが岩澤理論です。岩澤理論の主題は、 $p$  進 L 関数と Selmer 群という異質な対象を結び付けるものであり、岩澤主予想と呼ばれます。イデアル類群の岩澤主予想は、80 年代前半に Mazur と Wiles に解決され、現在ではモジュラー形式の岩澤主予想が活発に研究されています。

$p$  進数の新しい側面として複素数で離散的なパラメータが数では連続的となり、Eisenstein 級数以外にも肥田族など  $p$  進モジュラー形式の連続族が存在し、複素変数に類似した円分変数の他に、反円分変数や連続族のパラメータを加えた多変数  $p$  進 L 関数など様々なタイプの  $p$  進 L 関数を考えられることがあります。整数で近似できるという複素数にはない  $p$  進数の性質により、近年では複素 L 関数より  $p$  進 L 関数の方面で進展が大きい部分も少なくありません。

## 2. 研究の目的

これまでの数論の発展の多くは、算術的研究対象を解析的对象 (例えば、L 関数) に結び付けて解明することで達成されてきました。本研究は、岩澤理論の手法も交えて、多変数モジュラー形式の L 関数の特殊値や微分値の代数的性質や  $p$  進的性質を多角的な視点から追求することを目的とします。そのために様々な  $p$  進 L 関数を具体的に構成することから始めます。

## 3. 研究の方法

複素パラメータを持つモジュラー形式を積分することで L 関数を構成する手法は、積分表示と呼ばれます。積分表示は解析的枠組のみならず、数論幾何学や岩澤理論の研究に有用であること

も知られています。例えば、 $GL(2) \times GL(2)$ の積分表示は、楕円曲線の  $L$  関数の微分値を Heegner 点に関係付ける Gross-Zagier 公式や楕円曲線の岩澤理論で重要な加藤 Euler 系の構成でも根本的役割を果たします。3 重積  $L$  関数は  $GL(2) \times GL(2) \times GL(2)$ の  $L$  関数であり、その自然な高次元化です。市野篤史氏は、3 重積  $L$  関数の中心値とモジュラー形式の 3 重積周期の 2 乗の関係式を証明しました。この周期公式は市野-池田予想の特別な場合であり、市野公式と呼ばれます。Darmon と Rotger は市野公式を用いて、3 変数の非バランス型 3 重積  $p$  進  $L$  関数を構成し、同変 BSD 予想に応用しています。台湾国立大学の Ming-Lun Hsieh 教授も市野公式を用いて、バランス型と非バランス型の 3 変数  $p$  進  $L$  関数を精密に構成しています。一方、周期公式では円分  $p$  進  $L$  関数を構成できないので、本研究では、積分表示を用いて円分変数を持つ 3 重積  $p$  進関数を構成します。この多変数  $p$  進  $L$  関数から得られる  $p$  通常楕円曲線の 3 重積モチーフの円分  $p$  進  $L$  関数は中心値が 0 であり、その微分値の数論幾何的な意味を解明することを目指します。

市野公式は直交群の直積群に関するモジュラー形式の周期公式であり、高次の直交群への一般化は証明されていません。一方、ユニタリ群の直積に関しては市野-池田予想が完全に証明されています。ユニタリ群  $U(r,s)$ のモジュラー形式の  $L$  関数の特殊値の代数的性質や  $p$  進的性質は、符号  $(r,s)$ に関して大きく変化し、 $p$  進  $L$  関数も変化します。3 重積  $p$  進  $L$  関数のバランス型や非バランス型は、それぞれコンパクトユニタリ群のモジュラー形式や正則モジュラー形式の  $L$  関数に類似しています。Ming-Lun Hsieh とコロンビア大学の Michael Harris 教授と共同で、それらの  $p$  進  $L$  関数を市野-池田公式を用いて構成し、岩澤主予想や Bloch-Kato 予想の研究に応用することが本研究の次なる目的です。

#### 4 . 研究成果

(1) Garret の積分表示を用いて、バランス型 4 変数 3 重積  $p$  進  $L$  関数を構成しました。  $p$  通常楕円曲線の 3 重積モチーフの円分  $p$  進  $L$  関数の例外零点での高次微分値を  $p$  通常楕円曲線の  $L$  不変量を用いて明示的に計算しました。

(2) モジュラー形式の中心指標の積が自明指標でなければ 3 重積周期は 0 となり、中心指標の積が自明指標であるときだけ市野公式は成立します。一方、3 重積周期に関係する非自明局所不変 3 重線型形式の存在は局所表現のイプシロン因子の符号で判定されることが知られており、イプシロンダイコトミーと呼ばれています。筆者は市野公式を中心指標の積が二次指標である場合に 2 次基底変換の 3 重積周期を用いて拡張したことに加えて、局所 2 次基底変換の非自明不変 3 重線型形式の存在をガンマ因子を用いて判定しました。

(3) Stark-Heegner 点とは、Darmon が導入した Heegner 点の  $p$  進類似であり、この点を用いて虚数乗法論を実二次体に拡張する野心的な研究も進められています。Hilbert-Eisenstein 級数の対角制限を計算し、ある  $p$  進  $L$  関数の重さ変数に関する微分値と Stark-Heegner 点の  $p$  進対数の関係式を導きました。

(4) 市野-池田公式を用いて  $U(3)$ の 3 変数肥田族と  $U(2)$ の 2 変数肥田族からコンパクトなユニタリ群の直積  $U(3) \times U(2)$ の 5 変数  $p$  進  $L$  関数を構成しました。これは Ming-Lun Hsieh と東京電機大学の千田雅隆教授が研究した楕円モジュラー形式の反円分  $p$  進  $L$  関数の高次元化です。この研究のためにコンパクトユニタリ群の肥田族のペアリングや対角サイクルに関して詳しい研究を行ないました。

(5) 市野-池田公式を用いて準分裂ユニタリ群の直積  $U(2,1) \times U(1,1)$ 上の正則モジュラー形式の  $p$  進  $L$  関数を構成しました。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ming-Lun Hsieh and Shunsuke Yamana	4. 巻 -
2. 論文標題 Four-variable p-adic triple product L-functions and the trivial zero conjecture	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-023-02768-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ming-Lun Hsieh and Shunsuke Yamana	4. 巻 -
2. 論文標題 Bessel periods and anticyclotomic p-adic spinor L-functions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Transaction of American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sungmun Cho, Shunsuke Yamana, Takuya Yamauchi	4. 巻 92
2. 論文標題 Derivatives of Eisenstein series of weight 2 and intersections of modular correspondences	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg	6. 最初と最後の頁 27-52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12188-022-00256-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 山名 俊介	4. 巻 2225
2. 論文標題 捻り三重積p進L関数の例外零点	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 114-118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ming-Lun Hsieh, Shunsuke Yamana	4. 巻 26
2. 論文標題 Base change and triple product L-series	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Representation Theory	6. 最初と最後の頁 402-431
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ert/602	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ming-Lun Hsieh, Shunsuke Yamana	4. 巻 33
2. 論文標題 Restriction of Eisenstein series and Stark-Heegner points	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux	6. 最初と最後の頁 887-944
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/jtnb.1182	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shunsuke Yamana	4. 巻 373
2. 論文標題 On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Hermitian cusp forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Transaction of American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 5395-5438
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8096	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikeda, Tamotsu; Yamana, Shunsuke	4. 巻 53
2. 論文標題 On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure	6. 最初と最後の頁 1121-1181
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24033/asens.2442	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shunsuke Yamana	4. 巻 732
2. 論文標題 Degenerate principal series and Langlands classification	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 275-286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/732	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsushi Ichino, Shunsuke Yamana	4. 巻 746
2. 論文標題 Periods of automorphic forms: The case of $(U_{n+1} \times U_n, U_n)$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik	6. 最初と最後の頁 1-38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2015-0107	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計24件 (うち招待講演 15件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 山名俊介
2. 発表標題 A Siegel-Weil formula for $U(2,1)$
3. 学会等名 南大阪保型表現セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 p-adic L-functions for $U(3) \times U(2)$
3. 学会等名 Pacific Rim Mathematical Association Congress 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山名俊介
2. 発表標題 p-adic L-functions for $U(3) \times U(2)$
3. 学会等名 RIMS研究集会「代数的整数論とその周辺2022」(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 p-adic L-functions for $U(2,1) \times U(1,1)$
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Representation Theory Seminar
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 p-adic L-functions for $U(2,1) \times U(1,1)$
3. 学会等名 NCTS Number Theory Seminar
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Exceptional zeros of twisted triple product L-functions
3. 学会等名 RT/NT seminar from NUS (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Exceptional zeros of twisted triple product L-functions
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Representation Theory Seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山名 俊輔
2. 発表標題 捻り三重積 $p$ 進L関数の例外零点
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「代数的整数論とその周辺」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Base change and central values of triple product L-series
3. 学会等名 The Eighth Pacific Rim Conference in Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Base change and central values of triple product L-series
3. 学会等名 KIAS number theory seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 On exceptional zeros of p-adic L-functions
3. 学会等名 第六回京都保型形式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 On central derivatives of triple product p-adic L-functions
3. 学会等名 Iwasawa2019, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Seesaw dual pairs and theta correspondence I, II
3. 学会等名 CMC special weeks on number theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 A twisted Ichino formula
3. 学会等名 南大阪保型表現セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 p進L関数の例外零点
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「代数的整数論とその周辺」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 On central derivatives of triple product p-adic L-functions
3. 学会等名 Modular Forms（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山名 俊介
2. 発表標題 Four-variable triple product p-adic L-functions
3. 学会等名 第4回日台整数論研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 L-functions and theta correspondence for classical groups (lecture series of 7 hours)
3. 学会等名 Algebraic and analytic aspects of automorphic forms, ICTS, Bangalore, India（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Four-variable triple product p-adic L-functions
3. 学会等名 Algebraic and analytic aspects of automorphic forms, ICTS, Bangalore, India (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山名俊介
2. 発表標題 Towards p-adic Gross-Zagier formula
3. 学会等名 RIMS 共同研究(公開型)「保型形式, 保型表現とその周辺」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Towards p-adic Gross-Zagier formula
3. 学会等名 International conference on number theory, IISER, Thiruvananthapuram, India (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Four-variable triple product p-adic L-functions
3. 学会等名 Special session on "Recent Developments in Automorphic Forms", AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, University of Hawaii at Manoa, USA (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Yamana
2. 発表標題 Towards p-adic Gross-Zagier formula
3. 学会等名 Special Session on "Recent Advances and Applications of Modular Forms", AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, University of Hawaii at Manoa, USA (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山名俊介
2. 発表標題 Four-variable triple product p-adic L-functions
3. 学会等名 The 12th Young Mathematicians Conference on Zeta Functions, Nagoya University
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 南大阪代数セミナー	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 保型形式と数論	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 RIMS 共同研究(公開型)「保型形式とL関数の解析的、幾何的、p進的研究」	開催年 2020年～2020年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------

中国	National Taiwan University			
米国	Columbia University			
中国		Academia Sinica		