

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03211

研究課題名(和文)非アルキメデスの幾何のアラケロフ幾何への融合

研究課題名(英文)Fusion of nonarchimedean geometry and Arakelov geometry

研究代表者

山木 彦彦 (Yamaki, Kazuhiko)

筑波大学・数理解析系・教授

研究者番号：80402973

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：アラケロフ幾何では、算術多様体、すなわち、整数係数の多変数多項式系の共通零点として定義される多様体を対象とする。素数  $p$  を固定して、算術多様体を定義する多項式系の係数を  $p$ -進数と見なせば、これは  $p$ -進数体上の非アルキメデスの解析幾何学的対象ともみなせる。このように、非アルキメデス幾何学的対象はアラケロフ幾何において自然に現れる。非アルキメデス幾何学的対象のうち、本研究では、主にベルコビッチ解析空間とトロピカル多様体を中心に扱った。特に、ベルコビッチ解析空間の重要な閉部分集合である「骨格」とそのトロピカル化との間の関係、特に、「忠実トロピカル化」と呼ばれる同一視の存在について成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果は、ベルコビッチ解析空間上における様々な解析的対象を調べる上で大きな意義がある。忠実トロピカル化を通じて、解析空間上の対象をトロピカル幾何学的枠組みにおいて組み合わせ論的に考察することが可能となる点大きい。また、忠実トロピカル化問題はトロピカル化という操作における基本的問題であり、この分野の基礎理論構築という視点からも意義が深い。社会的意義は、現時点では特に見当たらないが、トロピカル幾何は他の様々な分野で応用されていることから、将来的に意味のある応用が得られることは期待できる。

研究成果の概要(英文)：In Arakelov geometry, we study an arithmetic variety, i.e., something defined as the common zero of a polynomial system of integer coefficients. If we fix a prime  $p$  and regard the coefficients of the polynomials defining the variety as  $p$ -adic numbers, it can be regarded as a nonarchimedean analytic geometric object over the  $p$ -adic number. Thus, nonarchimedean geometric objects appear naturally in Arakelov geometry. Among the nonarchimedean geometric objects, this study focuses mainly on Berkovich analytic spaces and tropical varieties. In particular, we obtained results on the relation between the “skeleton,” which is an important closed subset of the Berkovich analytic space, and its tropicalization; in particular, the existence of an identification, called a “faithful tropicalization”.

研究分野：代数幾何学

キーワード：非アルキメデスの幾何 ベルコビッチ解析空間 トロピカル幾何 骨格 忠実トロピカル化

## 1. 研究開始当初の背景

アラケロフ幾何は、整数環上の代数多様体において交叉理論を展開することを目的に考案された。整数環のスペクトラム(整数環の素イデアル全体の集合にザリスキ位相を入れたもの)は体上の(アファイン)代数曲線との類似でしばしば語られる。代数曲線は自然なコンパクト化を持つが、整数環のスペクトラムは無限素点にアルキメデスの絶対値を乗せることで「コンパクト化」される(積公式はその「正しさ」の傍証である)。このアイデアを推し進め、整数環上の射影多様体(算術多様体と呼ばれる)を無限素点上で計量を入れて考えることにより「コンパクト化」し、古典的交叉理論の算術化である「算術交叉理論」を展開するというのが、アラケロフ幾何の基本となるアイデアである。実際、この理論は発展し算術において重要な形で応用されている。算術交叉を記述する上では、閉部分多様体のグリーンカレントと呼ばれるカレント(微分形式的な空間の双対空間の元)が重要な役割を果たす。実際、算術多様体  $X$  の算術輪体は、その閉部分多様体、各無限素点、そしてその無限素点上に付随する複素解析空間上の閉部分多様体のグリーンカレントの組を使って表現される。そして、例えば計量付き直線束が定める算術第 1 チャーン類の関係する算術交叉では、曲率形式の外積で与えられるカレントが現れる。古典的代数幾何と同様に算術第 1 チャーン類の算術交叉は重要であり、曲率およびその外積も当然に重要な対象となる。特に、曲率形式の最大外積は自然に(符号付き)ボレル測度(モンジュ・アンペール測度と呼ばれる)を与えるが、これはディオファントス幾何に応用され、Ullmo 及び Zhang による代数体上のポゴモロフ予想およびその一般化では非常に大きな役割を果たした。このように、アラケロフ幾何ではアルキメデスの素点の複素解析空間における微分幾何的・函数解析的取り扱いがなされ、それが算術において重要な役割を果たしているのである。

非アルキメデスの幾何とは、非アルキメデスの絶対値に立脚した解析幾何である。複素多様体論などの複素数上の「通常の」幾何では、通常アルキメデスの絶対値に関して定義された収束性を基にして解析函数が定義され、その構造が備わった幾何学が展開される。非アルキメデスの幾何とは、非アルキメデスの絶対値に関して同様の考え方で展開される幾何学である。

## 2. 研究の目的

非アルキメデスの幾何とは、非アルキメデスの絶対値に立脚した解析幾何である。複素多様体論などの複素数上の「通常の」幾何では、通常アルキメデスの絶対値に非アルキメデスの幾何、特にベルコピッチ空間においてアラケロフ幾何における無限素点における取り扱い方法を持ち込み、非アルキメデスの幾何視点をアラケロフ幾何に融合する研究を目的とするに至った。

こうしたアイデアが具現化されれば、代数体だけではなく函数体上のディオファントス幾何にも新たな展開が望める。また、本研究においては、アラケロフ幾何で進展してきたアイデアを非アルキメデスの素点で適用することにより、アラケロフ幾何のアイデアを古典的代数幾何に持ち込むという流れが生じる。これは、本研究の意義の一つである。

こうした目的の下で非アルキメデスの幾何の研究を進めると、自ずとベルコピッチ解析空間やトロピカル幾何の研究を掘り下げることとなる。それにより、こうした非アルキメデスの幾何に関する研究に寄与することも、本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

本研究は、研究代表者が数学的考察を重ねることにより推進することが基本となる。しかしながら、それは研究代表者一人で研究を進めるという意味ではない。

本研究においては、ベルコピッチ解析空間やトロピカル幾何の研究が主要な位置を占める。その研究を推進するにあたっては、古典的代数幾何の研究が重要な示唆を与える。ここで「古典的」と言っているのは、かつて研究されていた過去の遺物という意味ではなく、古い歴史があり今も盛んに研究されている従来の代数幾何のことを意味している。したがって、代数幾何の最先端の研究に触れ続け、また代数幾何の研究者と密に交流することが非常に重要となる。

また、アラケロフ幾何や非アルキメデスの幾何の研究者は海外で活躍する外国人が多い。こうした研究者との交流も研究推進の要となる。本国においても、分野が近い共同研究者があり、その研究者との交流は研究を進めるにあたって不可欠である。

こうした事情により、本研究を進めるにあたっては、研究代表者による数学的考察と、国内外の出張を通じた情報収集および議論、そして自身の結果に対する他の専門家からのフィードバックが、非常に重要なものとなる。これらを有機的に組み合わせて、研究を進めて行く。

## 4. 研究成果

本研究では、アラケロフ幾何への応用を見据えて非アルキメデス幾何の研究を進めることが大きな目的であったが、アラケロフ幾何への顕著な貢献に至るまでの成果は得られていない。しかしながら、それを目指して進めた非アルキメデスの幾何の研究自体には大きな進展があり、その

成果は将来的にアラケロフ幾何へと応用されることが期待できる。

本研究で得られた非アルキメデスの幾何に関する成果について説明する。今回の成果は、一言で言えば、「忠実トロピカル化」に関するものである。これについて、背景も含めて説明する。非アルキメデスの幾何において、ベルコビッチ解析空間は最も主要な幾何的对象である。それは位相空間としては局所ハウスドルフ局所コンパクト空間であり、種々の解析的概念を考えることができる。ただ、位相空間としての「形」を把握することはそのままでは簡単ではない。そこで、その「内在的」有限近似物として、「骨格」と呼ばれる閉部分空間で整有理多面体集合の構造が入ったものが重要な役割を果たす。これはもちろん部分空間であり全体を理解するのに十分であるとは言えないが、実際の応用上では、ベルコビッチ解析空間上の重要な対象物が部分空間である骨格上の対象であることも少なくなく、骨格を理解することには大きな意義がある。

ベルコビッチ空間の別の有限近似物として、そのトロピカル化として得られるトロピカル多様体というものもある。こちらは、格子構造の入った有限次元実ベクトル空間(またはその部分コンパクト化)の中の整有理多面体的部分集合であり、組み合わせ論的記述が可能な対象である。ベルコビッチ解析空間の外部にある有限近似物という意味で、「外在的」有限近似物と言っても良いであろう。

この「内在的」有限近似物が、トロピカル化写像を通じて「外在的」有限近似物の整有理多面体構造を保つ埋め込みになっているのかどうかを問うのが、忠実トロピカル化の問題である。そうになっているとき、これを骨格の忠実トロピカル化と呼ぶ。

ベルコビッチ解析空間上の有理型函数を用いたトロピカル化写像による忠実トロピカル化については、Gubler–Rabinoff–Werner によってその存在が知られていた (Walter Gubler, Joseph Rabinoff, and Annette Werner, *Skeletons and tropicalizations*, *Adv. Math.* 294 (2016), 150–215, DOI 10.1016/j.aim.2016.02.022). 本研究では、代数多様体上の直線束とその代数多様体に付随するベルコビッチ解析空間の骨格に対し、その大域切断で得られる射影空間への射のトロピカル化が、骨格の忠実トロピカル化を与えるための十分条件について考察した。特に、これは現在進行中の仕事であるが、アーベル多様体の標準骨格をテータ函数のトロピカル化で忠実トロピカル化するための十分条件に関する結果が、現時点では出版に至っていないものの、本課題期間における重要な成果である。

それ以外にも、トロピカルトーリック多様体の忠実埋め込みの話題についても、論文としては未発表の成果を得ている。これは、いわばトーリック多様体の直線束が標準骨格を忠実トロピカル化するための条件に関する成果である。また、そこからトロピカル幾何の「構造層」に関する研究も派生している。これは、今後のトロピカル幾何の基礎付けに関する研究であり、まだ完成していないが今後の進展が期待できる研究である。

本課題期間に結実した上記結果は、まだ論文としては完成に至っていないが、研究集会等において発表していることは付言しておく。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Kazuhiko Yamaki
2. 発表標題 Progress in the geometric Bogomolov conjecture
3. 学会等名 Recent Developments in Algebraic Geometry, Arithmetic and Dynamics Part 1 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山木 壱彦
2. 発表標題 多面体的多様体の因子に付随した忠実埋め込み
3. 学会等名 第4回トポカル幾何ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山木 壱彦
2. 発表標題 幾何的ボゴモロフ予想の進展
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuhiko Yamaki
2. 発表標題 Ample divisors on tropical varieties
3. 学会等名 Workshop "Regensburg days on non-archimedean geometry" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuhiko Yamaki
2. 発表標題 Ample divisors on tropical toric varieties
3. 学会等名 The 14th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar --- On the occasion of Prof. Yokura's retirement --- (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山木 啓彦
2. 発表標題 Nonarchimedean theta functions
3. 学会等名 徳島代数幾何ワークショップ
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

筑波大学 研究者総覧 <a href="https://trios.tsukuba.ac.jp/ja/researchers/0000004512">https://trios.tsukuba.ac.jp/ja/researchers/0000004512</a> 筑波大学 研究者総覧 <a href="https://trios.tsukuba.ac.jp/researcher/0000004512">https://trios.tsukuba.ac.jp/researcher/0000004512</a> <a href="https://kyouindb.iimc.kyoto-u.ac.jp/j/j06oW">https://kyouindb.iimc.kyoto-u.ac.jp/j/j06oW</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------