

令和 4 年 4 月 22 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03215

研究課題名（和文）保型微分方程式及びその解の数論の視点からの研究

研究課題名（英文）On study of modular linear differential equations and their solutions by arithmetic approach

研究代表者

境 優一（Sakai, Yuichi）

九州大学・多重ゼータ研究センター・学術研究員

研究者番号：10815567

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、整数論や頂点作用素代数の分野で度々現れる、常線形微分方程式の解空間に「保型性」という対称性を持つ「保型線形微分方程式」を対象とした研究である。この対象について一般系などよくわかっていないことがほとんどであった。本研究により、保型線形微分方程式の基本形や、保型線形微分方程式を介したモジュラー形式と呼ばれる関数と頂点作用素代数の指標関数との対応を発見することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モジュラー形式と楕円曲線との関係や、頂点作用素代数の指標関数の分類などで度々現れるなどしている保型線形微分方程式ですが、保型線形微分方程式自身について研究を行ったことにより、今まで明らかになっていなかった基本的性質などを解明した。また、保型線形微分方程式を介して整数論と頂点作用素代数とのある種の対応関係があることをいくつも確認できた。これは、同じ代数学の分野であるが、異なる研究対象を考察する際の道具としての有用性を示すものと確信している。

研究成果の概要（英文）：In this project, we study on an ordinary linear differential equation with a modular property, and we call it a modular linear differential equation (short for a MLDE). In general, we know few facts about MLDEs. Through this project, we find fundamental formulae of modular linear differential equations, and several correspondences between modular forms and characters for vertex operator algebras by using MLDEs.

研究分野：整数論

キーワード：保型線形微分方程式 モジュラー形式 準モジュラー形式 頂点作用素代数 指標関数 ベクトル値モジュラー形式 ヤコビ形式 楕円関数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

古くは、Fuchs・Poincare などの線形微分方程式に関する研究を源流の一つとする保形形式の理論は、整数論の分野において重要な結果を幾多も与え、また、物理学のさまざまな場面において現れるなど、数学と物理学をつなぐ魅力的な対象の一つとして広く認知されている。

例えば、整数論においては、金子・ザギエ[KZ]による超特異楕円曲線に関する多項式を与える関数を解して持つ2階の常線形微分方程式(Kaneko-Zagier 方程式)がある。また、Mathur-Mukhi-Sen[MMS]による2次元共形場理論における指標関数の分類に2階の常線形微分方程式を用いられている。このように数学と物理学の両方に現れる古典的な保形形式の多くは常線形微分方程式の解として現れるものが多数ある。

これら常線形微分方程式の特徴として、群の作用における解空間の不変性、いわゆる保型性が挙げられる。この性質によって特徴づけられた常線形微分方程式を保型線形微分方程式と呼称することとする。

特に、2次元共形場理論などの頂点作用素代数において、指標関数が張る空間の  $SL(2, \mathbb{Z})$  不変性と、保型線形微分方程式を満たすというツウ[Zhu]の結果があり、保型線形微分方程式は重要な役割を果たしていると考えられる。しかし、保型線形微分方程式を対象とした研究がほとんど存在しない状況であった。

この保型線形微分方程式について研究を行うことにより、より多くの整数論あるいは2次元共形場理論などの頂点作用素代数との関係性を見出すことが可能になると考えられる。

## 2. 研究の目的

上記のような背景を基として、保型線形微分方程式の構造や性質などを研究することにより、これまでわかっていた整数論や2次元共形場理論の結果の再解釈や一般化などを目的とする。明確には、保型線形微分方程式およびその解空間の構造を明らかに、解を具体的に記述することが挙げられるが、特に、(I) 保型形式・準保型形式などの関数を解として持ち、かつ、(II) 頂点作用素代数の指標関数と(解として現れるなどの)関係を持つ、保型線形微分方程式の係数関数が解、特に Fourier 係数に与える情報に関して詳細に記述することを目指した。本研究を具体的に以下の3つに分けて捉えられる。

### (1) 保型線形微分方程式の一般化

保型線形微分方程式は、どのような条件下において構成が可能なのか。また、構成可能な場合においてのそれらが与える具体的表現はどのようなものなのかを明らかにすること。

### (2) モジュラー形式と頂点作用素代数の指標関数との対応

保型線形微分方程式を介して、モジュラー形式と頂点作用素代数の指標関数との対応関係を明らかに、対応関係を与える際に用いる手法の構築を目指す。

### (3) 頂点作用素代数の指標関数の分類

保型線形微分方程式の解になるなどの特定の条件下における頂点作用素代数の分類を指標関数の分類によって行うことを目指す。

上記を主眼に研究を行った。

## 3. 研究の方法

本研究の研究方法としては、主として Mathematica などの計算機ソフトを使用して数値実験等を行い予想を立て、それらについての理論的構築等を行った。上記の研究の目的の3つに対しての方法について、具体的には以下の通りである。

### (1) 保型線形微分方程式の解空間不変性に基づく条件を数値実験を用いて考察を行い一般形を予想、その予想を持ってその正当性(正しさ)を証明する。

### (2) 具体的事例において、保型線形微分方程式の解を計算機によって与えた形式的な Fourier 級数から対応する具体的な関数を予想し、その予想の正当性(正しさ)を証明する。

### (3) 具体的に保型線形微分方程式の形を指定し、その解として与えられる形式的な Fourier 級数を与える。その際に、Fourier 係数に関して具体的な連立方程式系を得ることができる。ゆえに、その連立方程式系の解についての条件の決定を計算機を援用して行う。

## 4. 研究成果

本研究における成果について、以下の事項が得られた。

- (1) 保型線形微分方程式の一般形について、解空間が、重さについてのスラッシュ作用素に関して不変となる条件を用いて一般的性質を導出した。これに付随して一般形の保型線形微分方程式の表示を与えた。加えて、一般形の表示が Rankin-Cohen 括弧積を用いたシンプルな表示にできる必要十分条件を与えた。さらに、微分作用素の観点から、保型線形微分方程式を考察し、Rankin-Cohen 括弧積に関する代数系として解釈できることを示した。本研究は、大阪大学の永友清和氏、マックスプランク研究所の D.Zagier 氏との共同研究である。本研究については、保型線形微分方程式と概正則保型形式との対応関係や、拡張された Rankin-Cohen 括弧積との対応など、様々な箇所において新たな対応関係を与えることがわかり、継続研究として、今後も研究を行っている。
- (2) 頂点作用素代数の指標関数の分類に関して、単純ヴィラソロ代数（極小モデル）に付随する頂点作用素代数の低次元の情報に付加した条件に基づいて、頂点作用素代数が存在するための中心電荷及び共形ウェイトの組に関しての完全分類を、高々 6 階の保型線形微分方程式を用いて行った。指標関数の関数表示を具体的に求め、これに対応する頂点作用素代数が存在する場合は具体的に決定をした。これに加えて、対応する指標関数のような振る舞いをする関数については、対応する頂点作用素代数の存在予想を与えた。本研究は主として、大阪大学の永友清和氏、鹿児島大学の有家雄介氏との共同研究により得られた結果である。5 階・6 階の保型線形微分方程式に関する研究については、整数論及び頂点作用素代数の観点から更なる進展が見込まれるため、継続研究を行っている。
- (3) 2 階の保型線形微分方程式において、金子-永友-境 [KNS] で行った指標関数の分類の拡張として、表現論の観点からベクトル値モジュラー形式の理論を用いて、表現行列に現れる値を考察し、頂点作用素代数における global dimension 及び quantum dimension の値の考察を行った。これにより、2 階の保型線形微分方程式を満たす指標関数を持つ頂点作用素代数の分類を行った。本研究は、大阪大学の永友清和氏とカリフォルニア大学サンタクルーズ校の G.Mason 氏との共同研究である。
- (4) 3 階の保型線形方程式を満たす指標関数を持つ中心電荷が 8 と 16 となる頂点作用素代数の分類について、加群に対応する指標関数の先頭係数が特定の値をとる場合における条件及び対応する頂点作用素代数が数種類の格子に付随する頂点作用素代数しか存在しないことを示した。本研究は、大阪大学の永友清和氏とカリフォルニア大学サンタクルーズ校の G.Mason 氏との共同研究である。
- (5) シンプレティック・フェルミオンに対して、次数 2 までの指標関数が高々 5 階・7 階のモニックな保型線形微分方程式の解となることを示し、また、この保型線形微分方程式の他の対数項を持つ解の具体的表示を与えた。本研究は、大阪大学の永友清和氏と大阪大学の黒田大和氏との共同研究である。
- (6) カスプを持たない判別式が 6 となる cocompact な群に関するモジュラー形式の空間に関して、特定の重さに関する自己準同型写像を定義し、このことにより得られる保型線形微分方程式に関する解が志村曲線上で定義される超特異多項式と素数標数の体上で同値となることを示した。本研究は、フルモジュラー群との類似物が他の場合においても得られており、研究を継続して行っている。

#### <参考文献>

- [KZ] M.Kaneko and D.Zagier, Supersingular  $j$ -invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol.7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 97-126, (1998)
- [KNS] M.Kaneko, K.Nagatomo and Y.Sakai, Modular forms and second order ordinary differential equations: applications to vertex operator algebras. Lett. Math. Phys. 103(4), 439-453 (2013)
- [MMS] S. Mathur, S. Mukhi and A. Sen, On the Classification of Rational Conformal Field Theories, Phys. Lett. B 213 No. 3 (1988)
- [Zhu] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. Amer. Math. Soc., 9, 237-302, (1996)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mason Geoffrey, Nagatomo Kiyokazu, Sakai Yuichi	4. 巻 15
2. 論文標題 Vertex operator algebras of rank 2: The Mathur-Mukhi-Sen theorem revisited	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 59 ~ 90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/CNTP.2021.v15.n1.a2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nagatomo Kiyokazu, Mason Geoffrey, Sakai Yuichi	4. 巻 753
2. 論文標題 Vertex operator algebras with central charge 8 and 16	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Vertex Operator Algebras, Number Theory and Related Topics	6. 最初と最後の頁 157 ~ 186
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/753/15173	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nagatomo Kiyokazu, Kurokawa Yamato, Sakai Yuichi	4. 巻 753
2. 論文標題 Pseudo-characters of the symplectic fermions and modular linear differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Vertex Operator Algebras, Number Theory and Related Topics	6. 最初と最後の頁 187 ~ 211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/753/15171	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 3件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 境 優一
2. 発表標題 Modular linear differential equations in general form
3. 学会等名 第 18 回広島島仙台整数論集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 境 優一, 永友清和, G. Mason
2. 発表標題 Vertex operator algebras with central charge 8 and 16
3. 学会等名 2019年日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 境 優一
2. 発表標題 Modular linear differential equations : application to vertex operator algebras
3. 学会等名 The 2nd Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 境 優一, 永友清和
2. 発表標題 Characterization of minimal models by modular linear differential equations of order 4 and their modules
3. 学会等名 2020年日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuichi Sakai
2. 発表標題 Modular linear differential equations in general form
3. 学会等名 Vertex operator algebras, number theory, and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuichi Sakai
2. 発表標題 Modular linear differential equations in general form
3. 学会等名 2018年度日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuichi Sakai
2. 発表標題 Modular linear differential equations and generalized Rankin-Cohen brackets
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuichi Sakai
2. 発表標題 Modular linear differential equations and generalized Rankin-Cohen brackets
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「保型形式, 保型L関数とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuichi Sakai
2. 発表標題 On modular solutions of a certain modular linear differential equation for cocompact groups
3. 学会等名 第146回日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	永友 清和 (Nagatomo Kiyokazu)  (90172543)	大阪大学・情報科学研究科・招へい准教授  (14401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	カリフォルニア大学サンタクルーズ校			
ドイツ	マックスプランク研究所			
中国	華東師範大学			