

令和 5 年 4 月 27 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03216

研究課題名(和文)代数多様体の有理性とその周辺に関する研究

研究課題名(英文)Rationality problem of algebraic varieties and related topics

研究代表者

岡田 拓三 (Okada, Takuzo)

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号：20547012

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：射影直線上の $1/2(1,1,1)$ 型の末端商特異点を持つ次数1のdel Pezzo曲面束が双有理剛的となるための非自明な十分条件を与えた。特にそのようなdel Pezzo曲面束が、射影直線上のトーリック $P(1,1,2,3)$ 束に埋め込まれている場合に、双有理剛性がK条件と呼ばれる既知の条件で特徴付けられることを示した。その他、いくつかの3次元の余次元4主ファノ多様体の双有理超剛性や多くのファノ多様体の非安定有理性、及び多くの3次元のファノ重み付き完全交叉のK安定性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体の有理性を判定する有理性問題は、代数幾何学において古くから研究されている重要問題である。特異点を持つdel Pezzo曲面束の有理性判定については多くのことが知られていない状況であった。del Pezzo曲面束が双有理剛的であれば非有理的であるため、本研究成果は、3次元del Pezzo 曲面束の有理性問題を着実に進展させたと言える。また、その他の結果も同様に、代数多様体の有理性問題や、3次元ファノ多様体のK安定性の研究を進展させた。

研究成果の概要(英文)：We study del Pezzo fibrations of degree 1 over the projective line with terminal cyclic quotient singular points of type $1/2(1,1,1)$, and give a non-trivial sufficient condition for them to be birationally rigid. In particular, we show that birational rigidity can be characterized by the K-condition for del Pezzo fibrations with $1/2(1,1,1)$ points which are embedded into a toric $P(1,1,2,3)$ -bundle over the projective line. Moreover, we proved birational superrigidity for some codimension 4 prime Fano 3-folds, stable irrationality of many Fano varieties, and K-stability of many Fano 3-fold weighted complete intersections.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ファノ多様体 del Pezzo曲面束 双有理剛性 有理性問題 K安定性

1. 研究開始当初の背景

代数多様体は、(それと同次元の)射影空間と双有理同値になる場合に有理的であるという。代数多様体の有理性を判定する問題(有理性問題)は、古くから研究されている問題である。一般に、代数多様体の有理性を決定するよりも非有理性を決定する方が難解であるとみなされている。極小モデル理論により、(複素数体上で定義された)3次元代数多様体の有理性問題は、(ピカル数1の)ファノ多様体、射影直線上の del Pezzo 曲面束、及び有理曲面上の2次曲線束の有理性を判定することに帰着される。これらを総称して3次元の(有理連結的)森ファイバー空間と呼ぶ。ここに、これら森ファイバー空間は一般に末端特異点と呼ばれる穏やかな特異点を持っていることを注意しておく。また、森ファイバー空間の有理性判定を主たる目的として、双有理剛性と呼ばれる概念が導入されている。大雑把に言えば、この性質は双有理同値類における森ファイバー空間の構造の一意性として定義される概念であり、その森ファイバー空間の非有理性を導くものである。

本研究課題の主対象である射影直線上の del Pezzo 曲面束(以下、「射影直線上の」という文言は省略する)の双有理剛性について、研究開始当初の背景を説明する。非特異 del Pezzo 曲面束の有理性や双有理剛性の決定に関しては、満足の行く結果が知られている。del Pezzo 曲面束の次数が4以上であればそれらは非双有理剛的である。Pukhlikov や Grinenko により、del Pezzo 曲面束で次数が3以下のものに対しては、それが双有理剛的であることと、K条件と呼ばれる特定の条件が満たされることの同値性が示されている。このようにして、非特異 del Pezzo 曲面束の双有理剛性は満足のいく形で理解されている。一方で、双有理幾何学の見地からすれば、非特異なもののみでなく、末端特異点を持つ対象を考察することが必須である。しかしながら、研究開始当初の時点では、特異点を持つ場合には僅かな結果しか知られていない状況であった。例えば、Grinenko により、「高々末端特異点をもつ次数1の del Pezzo 曲面束に対して、双有理剛性と K 条件は同値であろう」という予想が提示されており、「双有理剛的であれば K 条件が満たされる」ことは Grinenko 自身により証明されているが、その逆については何もわかっていない。

2. 研究の目的

研究の目的の一つは、末端特異点を持つ del Pezzo 曲面束で次数1及び2のものを対象にそれらの双有理剛性について研究することである。より詳細には、非特異の場合に現れていた K 条件の類似の性質で双有理剛性を特徴付け(あるいは近似)できないか模索することである。あるいは、許容する特異点に制限を設けることで、Grinenko 予想「双有理剛性と K 条件の同値性」を解決することである。

さらにもう一つの研究目的として、この結果を応用することで、3次元非特異4次超曲面の非有理次数を決定することも挙げられる。ここに、非有理次数とは、代数多様体が有理性からどれほど乖離しているかを計測するある種の不変量のことである。

3. 研究の方法

特異点を持つ del Pezzo 曲面束の双有理剛性の研究は、当該研究の伝統的手法である極大特異点の理論を駆使して行う。これは非特異の場合に上手く機能する手法であり大変有用ではあるが、そのままでは特異点を持つ場合に適用できない。従って、極大特異点の手法を適宜拡張していくことが必要である。また、許容する特異点として末端特異点全部を考察すると大きな困難が生じることが予見できるので、差し当たっては特異点が現れる一般的な場合である末端商特異点を持つ場合を優先して考察する。

3次元非特異4次超曲面 X の非有理次数は、2あるいは3であることが知られており、特定のものを除外すれば2となることも知られている。従って、特定の3次元非特異4次超曲面に対してその非有理次数を決定することになる。それらの非有理次数が3となることと、特定の(末端特異点を持つ)次数2の del Pezzo 曲面束の非有理性が同値であることがわかっていることから、本研究は特異点を持つ次数2の del Pezzo 曲面束の非有理性を研究することにより遂行する計画である。

4. 研究成果

以下の成果を得た。

(1) $1/2(1, 1, 1)$ 型の末端商特異点を持つことを許容した, 射影直線上の次数 1 の del Pezzo 曲面束が双有理剛的となるための非自明な十分条件 (K 条件の類似) を与えた。特に, 射影直線上の重み付き $P(1, 1, 2, 3)$ 束に埋め込まれ, 高々 $1/2(1, 1, 1)$ 特異点しかもたない次数 1 の del Pezzo 曲面束が双有理剛的となることと K 条件が満たされることが同値になることを示した。これは Grinenko 予想の部分的解決である。

(2) 3 次元の余次元 4 主ファノ多様体の双有理剛性を決定する研究を行い, 3 つの族に属するものに対してそれらの双有理超剛性を示した。一般に, 重み付き射影空間への埋め込みの余次元が高くなるほどその複雑性から明示的研究は困難になる。本研究では, 3 次元の余次元 4 ファノ多様体で双有理超剛的となる初めての例を与えたことになる。

(3) いくつかの双有理剛的でない 3 次元余次元 2 主ファノ多様体のアルファ不変量が 1 以上となることを示し, その帰結としてそれらが K 安定的であり, それらの上にケーラー・アインシュタイン計量が存在することを示した。(In-Kyun Kim, Joonyeong Won との共同研究)

(4) 双有理超剛的な 3 次元ファノ重み付き超曲面のアルファ不変量が $1/2$ 以上であることを示した。このことから特にそれらが K 安定的であること, 及びケーラー・アインシュタイン計量の存在が従う (現在はプレプリントの段階である)。(In-Kyun Kim, Joonyeong Won との共同研究)

(5) 3 次元以上の任意次元において, 十分一般的なファノ指数が比較的小さい非特異ファノ重み付き超曲面が非安定有理的である (つまり, いかなる次元の射影空間と直積をとっても有利的にならない) こと, 従って特にそれらが非有理的であること, を示した。これは, 対象の多様体を正標数に還元した後に次数 0 のチャウ群の普遍的非自明性を示すという, Voisin, Colliot-Thélène-Pirutka, Totaro らにより導入・展開された議論を用いて証明を行った。

(6) 3 以上の整数 n に対して, n 次元のファノ指数 1 のファノ超曲面で r 次元線形部分空間を含ものの安定有理性について研究した。それらが非安定有理的となるための n 及び r に関する条件を与えた。証明は (5) と同様の議論をベースとして行われた。

(1) は当初の研究計画の目的を一部達成するものである。(2)~(6) は, 当初計画していない成果であるが, (2), (5), (6) は代数多様体の有理性問題に関する研究であり, 本研究課題に密接に関連するものである。(4), (5) は当初計画していなかったが研究成果と言える。残念ながら, 次数 2 の del Pezzo 曲面束について芳しい成果が今のところ得られておらず, それにより 3 次元非特異 4 次超曲面の非有理次数の決定には至らなかったが, その他多くの結果を得ることができ実りの多い研究期間であった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 8
2. 論文標題 Stable rationality of index one Fano hypersurfaces containing a linear space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1158 ~ 1171
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-021-00513-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 71
2. 論文標題 Smooth weighted hypersurfaces that are not stably rational	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ann. Inst. Fourier (Grenoble)	6. 最初と最後の頁 203 ~ 237
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/aif.3390	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 102
2. 論文標題 On birational rigidity of singular del Pezzo fibrations of degree 1	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1 ~ 21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12304	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 60
2. 論文標題 Birational Mori fiber structures of \mathbb{Q} -Fano 3-fold weighted complete intersections, III	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 825 ~ 893
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2019-0048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Igor Krylov, Takuzo Okada	4. 巻 2020
2. 論文標題 Stable Rationality of del Pezzo Fibrations of Low Degree Over Projective Spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 9075 ~ 9119
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny252	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 In-Kyun Kim, Takuzo Okada, Joonyeong Won	4. 巻 7
2. 論文標題 Alpha invariants of birationally bi-rigid Fano 3-folds I	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 272 ~ 308
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-020-00441-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 62
2. 論文標題 Stable Rationality of Cyclic Covers of Projective Spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 667 ~ 682
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0013091518000755	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 14
2. 論文標題 Birationality superrigid Fano 3-folds of codimension 4	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 191 ~ 212
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/ant.2020.14.191	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hamid Ahmadinezhad, Takuzo Okada	4. 巻 2
2. 論文標題 Stable rationality of higher dimensional conic bundles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Epijournal del Geometrie Algebrique	6. 最初と最後の頁 1~13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 28
2. 論文標題 Stable rationality of orbifold Fano 3-fold hypersurfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 99~138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/712	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計21件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 16件)

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Ob birationally solid Fano 3-fold hypersurfaces
3. 学会等名 Algebraic Geometry Seminar (IBS-CGP, Pohang, Korea) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 On birationally solid Fano 3-folds
3. 学会等名 Rationality, Moduli Spaces, and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birational rigidity of certain singular Fano 3-folds
3. 学会等名 The 21st Affine Algebraic Geometry Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岡田拓三
2. 発表標題 代数多様体の有理性の問題
3. 学会等名 複素幾何学の諸問題II (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birational geometry of sextic double solids
3. 学会等名 Seminar of Algebraic Geometry in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birational geometry of sextic double solids with cA points
3. 学会等名 Algebraic Geometry Seminar (Online, IBS-CGP) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡田拓三
2. 発表標題 On K-stability of birationally superrigid Fano 3-folds
3. 学会等名 阪大オンライン代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 K-stability of birationally superrigid Fano 3-fold weighted hypersurfaces
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birational geometry of Fano 3-fold WCI's
3. 学会等名 Fano varieties and Birational Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birational geometry of Fano 3-fold weighted complete intersections
3. 学会等名 The 19th Affine Algebraic Geometry Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 On K-stability of birationally superrigid Fano 3-folds
3. 学会等名 Birational Geometry, Kaehler-Einstein metrics and Degenerations (HSE, Moscow, Russia) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birationaly superrigid Fano 3-folds of codimension 4
3. 学会等名 Algebraic Geometry International Conference (KIAS, Seoul, Korea) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birationaly superrigid Fano 3-folds of codimension 4
3. 学会等名 Birational Geometry and Fano Varieties (Steklov Math. Inst., Moscow, Russia) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birationaly superrigid Fano threefolds of codimension 4
3. 学会等名 Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2019 (城崎国際アートセンター) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岡田拓三
2. 発表標題 Birationally superrigid Fano 3-folds of codimension 4
3. 学会等名 ファノ多様体及び関連する代数幾何学 (九州大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 On the degree of irrationality of quartic 3-folds
3. 学会等名 Birational Geometry, Kaehler-Einstein metrics and Degenerations (IBS-CGP, Pohang, Korea) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岡田拓三
2. 発表標題 3次元4次超曲面の非有理次数について
3. 学会等名 湯布院代数幾何ワークショップ (日本文理大学湯布院研修所) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Failure of stable rationality of various algebraic varieties via reduction modulo p
3. 学会等名 Birational Geometry and Arithmetic (Brown University, USA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 On birational rigidity of singular del Pezzo fibrations of degree 1
3. 学会等名 Positivity in Algebraic Geometry (Yonsei University, Korea) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Failure of stable rationality of various algebraic varieties
3. 学会等名 Algebraic Geometry in East Asia (VAST, Vietnam) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuzo Okada
2. 発表標題 Birational rigidity of del Pezzo fibrations
3. 学会等名 Explicit Birational and Affine Geometry (Saitama University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	POSTECH	KIAS	Seoul National University	
英国	Loughborough University			