

令和 5 年 6 月 11 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03217

研究課題名（和文）保型形式および多項式不変量を用いた対称性の探求

研究課題名（英文）An Approach to Symmetry Using Modular Forms and Polynomial Invariants

研究代表者

三枝崎 剛 (Miezaki, Tsuyoshi)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：60584068

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：符号・格子・頂点作用素代数という、互いに密接な関係を持つ数学的対象がある。3者は類似した性質を数多く持ち、例えば最小距離やt-デザインという概念が、それぞれに定義されている。特に符号はもともと情報伝達の手段、効率化を目的に導入された概念であり、実生活にも幅広い応用を持つ。従って3者の分類問題は、実生活への応用上も、数学的にも面白い重要な問題である。本研究の目的は、これら3者の分類に向けて、それぞれの数学的性質（最小距離やt-デザイン）を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果は、主に符号や格子、頂点作用素代数、さらにはマトロイドやグラフの分類問題に関するものである。符号はもともと情報伝達の効率化・高精度化を目標に導入された概念である。したがって本研究の成果は数学的にも、実生活への応用上も重要なものである。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is the classification of the codes, the lattices, and the vertex operator algebras, from the point of view of the automorphic forms and the design theory.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：符号 格子 頂点作用素代数 マトロイド グラフ 重さ多項式 テータ級数

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

符号・格子・頂点作用素代数という、互いに密接な関係を持つ数学的対象がある。符号から格子及び VOA が構成出来、格子から VOA が構成出来るように、3 者は類似した性質を数多く持ち、例えば最小距離や  $t$ - デザインという概念が、それぞれに定義されている。特に符号はもとも情報伝達の手段、効率化を目的に導入された概念であり、実生活にも幅広い応用を持つ。従って 3 者の分類問題は、実生活への応用上も、数学的にも面白い重要な問題である。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、これら 3 者の分類に向けて、それぞれの数学的性質を明らかにする事であった。例えば、それぞれに定義されている、最小距離の上界の決定や、 $t$ - デザインの  $t$  の値の決定は、3 者の分類へ役立つ事が知られており、本研究の目的とした。研究の道具として、3 者から得られる保型形式および多項式不変量を用いる。特に符号から多項式不変量が得られるが、これは完全不変量ではない。この不変量を、符号とマトロイドの関係を鑑みることによって多変数化し、符号の新たな完全不変量を構成し、分類の強力な道具とする計画であった。

### 3. 研究の方法

符号・格子・頂点作用素代数(以下、VOA と略す)の分類に向けて、3 者の性質を個別に調べる研究は数多く行われてきた。その結果、符号・格子の類似性が明らかになり、現在両者は相互作用を及ぼし合いながら進展を続けている。また符号から VOA を構成する方法が [Miyamoto(1996)] により確立され、近年符号、格子及び VOA を含めた 3 者の類似性が指摘され始めている。本研究はこの類似性に基づいた 3 者の総合的な研究を目指した。例えば符号で新しい結果を得た際、それを格子と VOA に拡張する。このような研究は数少ない。

3 者において、最小距離の大きい対象の研究は、デザインとの対応を考えても重要な問題である。従って、実際に最小距離の大きい 3 者を構成しようという試みは、数多く行われてきた。しかし、符号の長さが大きくなると、一般に難しい問題となり、そして最小距離がある一定以上大きい対象は非存在と予想され、実際にある長さ以上で非存在が示されている。3 者のその他の研究においても重要な方法は、保型形式のフーリエ係数の評価だが、その手法は純解析的なものである。この様に現在までの研究活動は、保型形式の解析的性質を用いたものが多い。

本研究に対する先行研究では、これに加えて、組合せ論的な性質を持ちこむことを目標としてきた。この様に様々な組合せ論的事実を持ち込むことは重要であり、一定の成果を挙げている。これを踏まえ、本研究においても組合せ論を前面に打ち出した研究を計画している。

符号・格子・頂点作用素代数の最小距離とデザイン理論に関しては、現在まで研究を続けており、本研究はその後継にあたる。特に、本研究の大きな特色である 3 者への組合せ論的なアプローチは、現在まで続けている。従って準備に関しては問題なく多くの研究が実行可能な状態にある。またマトロイド理論におけるタット多項式からの、符号へのアプローチはこれまでの研究が少ない。本研究では、このアプローチも取り入れ、3 者への応用を目指した。特に、マトロイド理論におけるタット多項式の変数化について、大浦学氏(金沢大学教授)、佐久間雅氏(山形大学准教授)、篠原英裕氏と共に共同研究を軸とした研究を目指した。

### 4. 研究成果

Tutte polynomial, complete invariant, and theta series (with Misaki Kume, Tadashi Sakuma, and Hidehiro Shinohara),  
Graphs and Combinatorics, 37 (2021), no. 5, 1545-1558.

グラフの新たな完全不変量を構成した。注目すべきはこの不変量は 1 変数である。また非同型格子にも関わらず同じータ級数を持つ格子の無限系列を構成した。その構成には、非同型グラフだが等しい Tutte 多項式を持つグラフマトロイドの存在がキーとなっている。

Average of complete joint weight enumerators and self-dual codes (with Himadri Shekhar Chakraborty),  
Designs, Codes and Cryptography, 89 (2021), no. 6, 1241-1254.

符号の平均完全ジョイント重さ多項式という概念を導入し、符号平均交叉数に関する新たな結果を示した。

A note on Assmus-Mattson type theorems (with Akihiro Munemasa and Hiroyuki Nakasora),  
Designs, Codes and Cryptography, 89 (2021), no. 5, 843-858.

極限的符号や格子から良いデザインが得られることが知られている . この論文では , 極限的に近い符号や格子からも良いデザインが構成されることを示した . 系として符号の重み多項式に関する制約条件を得ている .

Design-theoretic analogies between codes, lattices, and vertex operator algebras,  
Designs, Codes and Cryptography, 89 (2021), no. 5, 763-780.

極限的頂点作用素代数から良いデザインが得られる . 本論文では極限的に近い頂点作用素代数からも同様に良いデザインが得られることを示した . 関連して符号と格子 , 頂点作用素代数の類似した性質を論じている .

On Eisenstein polynomials and zeta polynomials II (with Manabu Oura),  
International Journal of Number Theory, 16 (2020), no. 1, 207-218.

アイゼンシュタイン級数の有限類似として , 大浦学氏 ( 金沢大学教授 ) によりアイゼンシュタイン多項式が導入されている . 本論文では符号に関連する群に対して , そのアイゼンシュタイン多項式の一般形を求めた . アイゼンシュタイン級数の類似した性質も得ている .

A generalization of the Tutte polynomials (with Manabu Oura, Tadashi Sakuma, and Hidehiro Shinohara),  
Proceedings of the Japan Academy, Ser. A Mathematical Sciences 95 (2019), no. 10, 111-113.

マトロイドの完全多項式不変量を構成した .

New invariants for integral lattices (with Ryota Hayasaka and Masahiko Toki),  
Interdisciplinary Information Sciences 25 (2019), no. 1, 53-57.

格子の新たな不変量を構成した .

The support designs of the triply even codes of length 48 (with Hiroyuki Nakasora),  
Journal of Combinatorial Designs 27 (2019), no. 11, 673-681.

アスマスとマトソンにより , 符号からデザインを構成する方法が得られている . 本論文ではこの方法により  $t$ -デザインが得られ , しかし部分的に  $(t+1)$ -デザインが得られる非自明な例を世界で初めて発見した .

On Eisenstein polynomials and zeta polynomials,  
Journal of Pure and Applied Algebra, 223 (2019), no. 10, 4153-4160.

アイゼンシュタイン級数の有限類似として , 大浦学氏 ( 金沢大学教授 ) によりアイゼンシュタイン多項式が導入されている . 本論文ではアイゼンシュタイン多項式に対して , アイゼンシュタイン級数の持つ性質を証明した .

On the cycle index and the weight enumerator (with Manabu Oura),  
Designs, Codes and Cryptography, 87 (2019), no. 6, 1237-1242.

符号の weight enumerator と符号に対応する置換群の cycle index は同値な概念であることが知られている [Cameron (2002)] . 本論文では置換群の complete cycle index を導入し , 符号の高種数 weight enumerator と同値な概念であることを示した .

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

|   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Tsuyoshi Miezaki  | 4. 巻<br>89              |
| 2. 論文標題<br>Design-theoretic analogies between codes, lattices, and vertex operator algebras | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>Designs, Codes and Cryptography   | 6. 最初と最後の頁<br>763-780   |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s10623-021-00842-2                                      | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-               |
| 1. 著者名<br>Tsuyoshi Miezaki, Akihiro Munemasa & Hiroyuki Nakasora                            | 4. 巻<br>89              |
| 2. 論文標題<br>A note on Assmus-Mattson type theorems   | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>Designs, Codes and Cryptography   | 6. 最初と最後の頁<br>843-858   |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s10623-021-00848-w                                      | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-               |
| 1. 著者名<br>Himadri Shekhar Chakraborty & Tsuyoshi Miezaki                                    | 4. 巻<br>89              |
| 2. 論文標題<br>Average of complete joint weight enumerators and self-dual codes                 | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>Designs, Codes and Cryptography   | 6. 最初と最後の頁<br>1241-1254 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s10623-021-00874-8                                      | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>Misaki Kume, Tsuyoshi Miezaki, Tadashi Sakuma & Hidehiro Shinohara                | 4. 巻<br>37              |
| 2. 論文標題<br>Tutte Polynomial, Complete Invariant, and Theta Series                           | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>Graphs and Combinatorics volume   | 6. 最初と最後の頁<br>1545-1558 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00373-020-02238-w                                      | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-               |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Tsuyoshi Miezaki, Hiroyuki Nakasora                        | 4. 巻<br>27            |
| 2. 論文標題<br>The support designs of the triply even codes of length 48 | 5. 発行年<br>2019年       |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Combinatorial Designs                           | 6. 最初と最後の頁<br>673-681 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1002/jcd.21670                        | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                               | 国際共著<br>-             |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Tsuyoshi Miezaki, Manabu Oura, Tadashi Sakuma, Hidehiro Shinohara | 4. 巻<br>95            |
| 2. 論文標題<br>A generalization of the Tutte polynomials                        | 5. 発行年<br>2019年       |
| 3. 雑誌名<br>Proceedings of the Japan Academy, Ser. A Mathematical Sciences    | 6. 最初と最後の頁<br>111-113 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.3792/pjaa.95.111                             | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                      | 国際共著<br>-             |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Tsuyoshi Miezaki, Manabu Oura                      | 4. 巻<br>1             |
| 2. 論文標題<br>On Eisenstein polynomials and zeta polynomials II | 5. 発行年<br>2020年       |
| 3. 雑誌名<br>International Journal of Number Theory             | 6. 最初と最後の頁<br>207-218 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1142/S1793042120500116        | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                       | 国際共著<br>-             |

|   |                   |
|---|-------------------|
| 1. 著者名<br>Tsuyoshi Miezaki, Manabu Oura                 | 4. 巻<br>印刷中       |
| 2. 論文標題<br>On the cycle index and the weight enumerator | 5. 発行年<br>2018年   |
| 3. 雑誌名<br>Designs, Codes and Cryptography               | 6. 最初と最後の頁<br>印刷中 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s10623-018-0518-x   | 査読の有無<br>有        |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                  | 国際共著<br>-         |

|   |                   |
|---|-------------------|
| 1. 著者名<br>Tsuyoshi Miezaki                                | 4. 巻<br>印刷中       |
| 2. 論文標題<br>On Eisenstein polynomials and zeta polynomials | 5. 発行年<br>2018年   |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Pure and Applied Algebra             | 6. 最初と最後の頁<br>印刷中 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.jpaa.2019.01.002    | 査読の有無<br>有        |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                    | 国際共著<br>-         |

|   |                   |
|---|-------------------|
| 1. 著者名<br>Ryota Hayasaka, Tsuyoshi Miezaki, Masahiko Toki | 4. 巻<br>印刷中       |
| 2. 論文標題<br>New invariants for integral lattices           | 5. 発行年<br>2018年   |
| 3. 雑誌名<br>Interdisciplinary Information Sciences          | 6. 最初と最後の頁<br>印刷中 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>なし                            | 査読の有無<br>有        |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                    | 国際共著<br>-         |

[学会発表] 計7件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tsuyoshi Miezaki  |
| 2. 発表標題<br>A generalization of the Tutte polynomials                       |
| 3. 学会等名<br>P-positivity in Matroid Theory and related Topics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|                                      |
|--------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>Tsuyoshi Miezaki          |
| 2. 発表標題<br>符号, 格子と頂点作用素代数におけるレーマー型問題 |
| 3. 学会等名<br>第66回 代数学シンポジウム (招待講演)     |
| 4. 発表年<br>2021年                      |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tsuyoshi Miezaki  |
| 2. 発表標題<br>A generalization of the Tutte polynomials                       |
| 3. 学会等名<br>Recent advances in matroids and Tutte polynomials (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|                                       |
|---------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>三枝崎剛                       |
| 2. 発表標題<br>完全巡回指数の導入                  |
| 3. 学会等名<br>日本数学会・2018年度秋季総合分科会 (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2018年                       |

|                                       |
|---------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>三枝崎剛                       |
| 2. 発表標題<br>タット多項式の高種数化                |
| 3. 学会等名<br>日本数学会・2018年度秋季総合分科会 (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2018年                       |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>三枝崎剛                         |
| 2. 発表標題<br>マシユー群に関するモックテータ関数のフーリエ係数について |
| 3. 学会等名<br>神楽坂代数セミナー                    |
| 4. 発表年<br>2018年                         |

|                        |
|------------------------|
| 1. 発表者名<br>三枝崎剛        |
| 2. 発表標題<br>タット多項式の高種数化 |
| 3. 学会等名<br>数理経済談話会     |
| 4. 発表年<br>2018年        |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

|   |
|---|
| Tsuyoshi Miezaki<br><a href="https://sites.google.com/site/tmiezaki/">https://sites.google.com/site/tmiezaki/</a><br>Tsuyoshi Miezaki<br><a href="http://www.f.waseda.jp/miezaki/index.html">http://www.f.waseda.jp/miezaki/index.html</a><br>Tsuyoshi Miezaki's website<br><a href="https://sites.google.com/site/tmiezaki/">https://sites.google.com/site/tmiezaki/</a><br>三枝崎剛のホームページ<br><a href="https://sites.google.com/site/tmiezakij/">https://sites.google.com/site/tmiezakij/</a> |
|---|

|                           |                       |    |
|---------------------------|-----------------------|----|
| 6. 研究組織                   |                       |    |
| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

|         |         |
|---------|---------|
| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|