

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03219

研究課題名(和文) 多項式自己同型の所属問題と関連領域の研究

研究課題名(英文) Research on the belonging problem of polynomial automorphisms and related fields

研究代表者

黒田 茂 (Kuroda, Shigeru)

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：70453032

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：多項式環は代数学において重要な対象だが、その基本的な性質はまだ十分に解明されているとは言い難く、多項式環の周辺には様々な未解決問題が残されている。本研究では、多項式環の自己同型などを中心に、様々な観点から多項式環の深い性質を調べ、関連する理論の構築を行った。正標数の場合の自己同型の不変式環の構造の解明や、イニシャル代数が無限性を持つ有限生成部分代数の新たな構成法の発見など、得られた成果は多岐に渡る。

研究成果の学術的意義や社会的意義

正標数の体上の多項式環の自己同型群の構造の解明は、近年の多項式環論における重要な課題の一つである。今回、不変式環などに関して新たな成果が得られたことは、この方面の研究を推進するうえで大きな助けになる。また、多項式環に関する基本的な結果は、代数学における基礎理論として重要な役割を果たしており、長期的な視点に立てば、代数学が将来さらなる発展を遂げるための礎になることも期待できる。

研究成果の概要(英文)：Polynomial rings are important subjects in algebra, but their fundamental properties have not yet been fully elucidated, and there are many unsolved problems around polynomial rings. In this study, we have investigated the deep properties of polynomial rings from various perspectives, focusing on automorphisms of polynomial rings, and constructed related theories. We have achieved a wide range of results, including determining the structure of invariant rings for automorphisms in positive characteristic, and discovering a new method for constructing finitely generated subalgebras whose initial algebras are infinite.

研究分野：可換環論

キーワード：多項式環 自己同型群 加法群作用 不変式環 正標数 永田自己同型 Anick自己同型 イニシャル代数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

多項式環の周辺には非常に難解な未解決問題が数多くあり、アフィン代数幾何学(多項式環論)という研究領域を形成している。様々なアプローチで研究が行われているが、決定的に有効な方法論ははまだ確立されていない。こうした問題の難しさの大きな要因として、多項式環の自己同型や自己同型群の難しさがあり、それらについての情報を得ることは、多項式環の研究において極めて有効と考えられる。

2. 研究の目的

多項式環や周辺領域の種々の難解な問題の研究に寄与することを大きな目標として、多項式環の自己同型群やその部分群などから手掛かりを得つつ、多項式環の深い性質を解明するための研究を様々な観点から行う。

3. 研究の方法

国内外の関連分野の研究者たちと交流し、情報交換や議論を行いながら研究を進めた。具体的に以下を行った。

- (1) 谷本龍二氏(静岡大学)と協力し、国内の関連分野の研究者を招聘して「多項式環論セミナー」を合計6回開催した。
- (2) 「アフィン代数幾何学研究集会」の開催に協力した。
- (3) 可換環論シンポジウムや可換環論セミナー等に参加した。
- (4) 海外の研究機関を訪問して情報交換や議論を行った。また、海外の研究者たちとメールで研究討議を行った。
- (5) 得られた研究成果を、関連分野のシンポジウムなどで発表した。

4. 研究成果

当初の想定を大きく超えて研究は展開し、様々な方向性の成果に結びついた。

(1) 正標数の場合の標数位数自己同型の研究

係数環の標数が $p > 0$ の多項式環の位数 p の自己同型(以下「標数位数自己同型」と呼ぶ)に関して、研究課題「多項式環の自己同型群の構造解析とその応用(15K04826)」の終盤頃から長年に渡って研究を行ってきたが、ひとまず完成の域に到達した。

標数位数自己同型の研究は、正標数の体上の多項式環の自己同型や自己同型群の研究で鍵になると考えられる。例えば、種々の興味深い自己同型が加法群作用から誘導されるが、それらの位数は必然的に係数環の標数と同じになる。有名な「永田自己同型」も、加法群作用から誘導されるので標数位数自己同型である。研究代表者は、安定順性予想に関する研究の過程で標数位数自己同型の重要性に気づき、これまで着々と研究を進めてきた。主な研究成果として以下が挙げられる。

多項式環の標数位数自己同型の標準形に関する研究

体上の2変数多項式環の標数位数自己同型が、適当な座標変換により常に基本自己同型になることを示した。また、3変数の場合に、充溢階数の加法群作用から、(どのような座標系を選んでも)変数をひとつも固定しない標数位数自己同型が多数得られることを示した。

標数位数自己同型の不変式環、台座イデアルなどの構造解析のための手法の整備、及び不変式環の多項式性と台座イデアルの単項性の関係の研究。

自己同型の不変式環は、自己同型の性質を調べるうえで有用な情報を多く持つ。標数位数自己同型の不変式環は Z/pZ 作用による不変式環と同じ概念であり、モジュラー不変式論の観点からも興味深い対象である。Maubach や谷本により、比較的簡単な形の標数位数自己同型に対して不変式環が調べられていたが、永田自己同型のような複雑な構造の標数位数自己同型の不変式環については、研究が行われていなかった。本研究では次のクラスの標数位数自己同型の不変式環の構造を詳しく調べた：

(a) UFD 上の2変数多項式環の永田型自己同型

(b) 体上の3変数多項式環の充溢階数の加法群作用のある族から誘導される自己同型

いずれについても、生成系を記述し、不変式環が多項式環と同型であるための必要十分条件を得ることに成功した。充溢階数の加法群作用は未解明な点の多い対象であり、それが誘導する自己同型の不変式環の詳細な研究は、注目に値する成果と考えられる。

さらに、標数位数自己同型の不変式環において「台座イデアル」の概念を定義し、(a)、(b)の場合にそれらの単項性を調べた。その結果、不変式環が多項式環と同型であることと、台座イデアルが単項イデアルであることが同値であることが判明した。不変式環の多項式性と台座イデアルの単項性の間の関係を示唆する研究はこれまでになく、極めて新規性の高い成果と言える。

ところで、標数位数自己同型の不変式環や、その台座イデアルの構造を調べるのは、一般に容

易でない。本研究では、そのための種々の技法の整備も行った。特に、(a)の不変式環の研究では、ある種のコンダクター公式の証明に成功したことが、構造の完全な決定に結びついた。また、一般的な枠組みにおいて、標数位数自己同型の不変式環を記述するための新たな方法を得た。(b)の不変式環は極めて複雑であり、この新たな方法を用いなければ、具体例のひとつであっても生成系を記述することは困難である。なお、ここで整備した種々の技法は、(a)、(b)以外の標数位数自己同型の研究でも有用であることを確認している。

正標数の体上の加法群作用を扱うための技法の整備、及びそれを用いた種々の例の構成。

標数が0の場合、加法群作用は局所冪零導分を用いて記述することが可能であり、扱いが容易である。正標数の場合にも導分の類似の概念(局所有限反復高階導分)を用いて加法群作用を記述することは可能だが、あまり実用的でない。本研究では、「拡張」と「制限」を駆使することで、加法群作用を効果的に扱う技法を整備した。また、実際に様々な加法群作用を構成し、それを用いて興味深い自己同型の具体例を与えた。こうした例は、将来的に関連領域の研究で活用されることが期待できる。また、現時点では、局所冪零導分の研究に比べ、正標数の場合の加法群作用の研究は少ないが、本研究で整備した技法を用いることで、後者の研究が大きく進展する可能性がある。

順生成系問題、安定順性予想などに関する新たな問題の提起。

標数位数自己同型の周辺において、今後、取り組むべき新たな問題を提起した。

その後、標数位数自己同型の指数性の研究などで新たな進展があり、現在も新たなプロジェクトの中でさらなる研究を継続中である。

(2) イニシャル代数が「無限性」を持つ有限生成部分代数の新たな構成法の発見

グレブナ基底の理論では、多項式環のイデアルと単項式順序に対し「イニシャルイデアル」と呼ばれる単項式イデアルが定義される。イニシャルイデアルの類似として、多項式環の部分代数と単項式順序に対し「イニシャル代数」と呼ばれる部分代数を定義できる。多項式環の部分代数の「イニシャル代数」は、多項式環の深い性質を調べるうえで重要な対象であり、多項式環の自己同型の研究とも関係がある。しかし、その詳細な構造を調べるのは困難な場合が多い。

ヒルベルトの基底定理により、イニシャルイデアルは常に有限生成である。また、単項式順序全体は非可算集合であるが、ひとつのイデアルから得られるイニシャルイデアルは有限個しか存在しないことが知られている。一方、有限生成な部分代数のイニシャル代数は一般に有限生成とは限らない。また、ひとつの有限生成な部分代数から得られるイニシャル代数全体の集合が無限集合であるような例も知られている。ただし、こうした「無限性」を実際に証明するのは一般に困難であり、あるクラスの不变式環と二、三の例が知られているのみであった。

本研究では、有限生成でないイニシャル代数を持つような、(ローラン)多項式環の有限生成部分代数の新たな構成法を与えた。この構成法を用いると、凸多面錐、有限生成代数、多項式写像といったありふれた対象を組み合わせることで、イニシャル代数が有限生成でないような有限生成部分代数の多種多様な例を容易に構成できる。また、この構成法で得られる有限生成部分代数に対し、無限に多くのイニシャル代数が存在するための一般的な条件を与えた。無限に多くのイニシャル代数を持つ有限生成部分代数の例は、ある種の不变式環の場合しか知られていなかったが、本研究により、そのような例が非常に多く存在することが判明した。

なお、今回与えた構成法は多項式写像と関係が深いので、多項式写像の詳細な解析に利用できる可能性がある。

(3) セグレ多様体のアフィン錐の自己同型、Anick 型自己同型などの研究

体 k 上の n 変数多項式環の「順部分群」が、多項式環の自己同型群それ自身と等しいかを問う「順生成系問題」は難問として広く知られている。 $n=3$ で k の標数が0の場合に Shestakov と Umirbaev によって否定的であることが示されたが、 $n=3$ で k が正標数の場合や $n>3$ の場合は依然として未解決である。

多項式環の場合の類似として、セグレ多様体のアフィン錐の自己同型群に対しても、「順部分群」の概念を定義できる。Arzhantsev-Gaiфуllin は2つの射影直線の直積の場合に、順部分群に属さない自己同型が存在することを示した。本研究ではこれを拡張し、一般のセグレ多様体の場合に、順部分群に属さない自己同型が多数存在することを示した。多項式環以外の場合に順部分群の概念を定義し、それに属さない自己同型の存在を示す研究は他にもあるが、任意標数、一般次元での結果は初めてであり、高次元の場合の自己同型の所属問題を考える上で示唆に富む。

ところで、多項式環の自己同型 f は、 f とアフィン部分群で生成される部分群が順部分群を含むとき余順自己同型と呼ばれる。近年、自己同型の余順性・非余順性をめぐって活発な研究が行われている。上記研究に関連し、余順自己同型の類似の研究も行い、多数存在することを確認した。この成果は、余順自己同型の研究に新たな方向性を与える。

また、本研究に関連し、有名な「Anick 自己同型」の大幅な一般化も与えた。さらに、その知

見が Leavitt path algebra と呼ばれる非可換環の研究に活用できることが判明したため, Giang Nam Tran 氏 (Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics) と共同研究を行った。主な成果として, Leavitt path algebra の新たなクラスの自己同型を構成し, Leavitt algebra の新たな既約表現を与えることに成功した。

(4) 上記以外にも様々な研究を行った。以下に概要を列挙する。

3 変数多項式環の自己同型の野生性判定に関し, “Generalized Shestakov-Umirbaev theory” の整理・再編を行った。この理論を正標数の場合に拡張する際に, 役に立つと期待できる。

研究代表者によるヒルベルトの第 14 問題の反例の構成法の改良を行った。

加法群作用の代数的構造についての理解を深めるために, 被約でない可換環上のアフィン直線への加法群作用の分類に取り組んだ。作用の「持ち上げ」の技法などを開発することで, 一定の条件の下での分類に成功した (黒田基紀氏との共同研究)。

研究代表者が以前行った PID 上の 2 変数多項式環の自己同型の線形化に関する研究を, アフィン平面の自己同型の holomorphic family の場合に拡張する研究を行った (F. Kutzschebauch 氏, T. Pelka 氏との国際共同研究)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Kuroda Shigeru	4. 巻 オンライン
2. 論文標題 Polynomial Automorphisms of Characteristic Order and Their Invariant Rings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 1~31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-022-09764-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kuroda Shigeru	4. 巻 151
2. 論文標題 A new class of finitely generated polynomial subalgebras without finite SAGBI bases	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 533~545
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/16158	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kuroda Shigeru, Nam Tran Giang	4. 巻 17
2. 論文標題 Anick type automorphisms and new irreducible representations of Leavitt path algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 811~834
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/489	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Motoki Kuroda, Shigeru Kuroda	4. 巻 52
2. 論文標題 G _a -actions on the affine line over a non-reduced ring	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 17,42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/h2021011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 SHIGERU KURODA, FRANK KUTZSCHEBAUCH, TOMASZ PELKA	4. 巻 未定
2. 論文標題 LINEARIZATION OF HOLOMORPHIC FAMILIES OF ALGEBRAIC AUTOMORPHISMS OF THE AFFINE PLANE	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 22ページ
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-021-09692-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kuroda Shigeru	4. 巻 556
2. 論文標題 Hilbert's fourteenth problem and field modifications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 93 ~ 105
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.03.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 黒田 茂	4. 巻 42
2. 論文標題 Finitely generated polynomial subalgebras without finite SAGBI bases	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 第42回可換環論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 6ページ
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeru Kuroda	4. 巻 2021/43
2. 論文標題 Finitely generated polynomial subalgebras without finite SAGBI bases	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Workshop Report: MFO-RIMS Tandem Workshop: Symmetries on Polynomial Ideals and Varieties	6. 最初と最後の頁 18,18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeru Kuroda	4. 巻 41
2. 論文標題 Wildness for determinantal polynomial automorphisms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第41回可換環論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 148, 158
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motoki Kuroda, Shigeru Kuroda	4. 巻 40
2. 論文標題 G _a -actions on a non-reduced affine line	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第40回可換環論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 64, 70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeru Kuroda	4. 巻 32
2. 論文標題 Determinant-fing polynomial automorphisms: The existence of co-tame elements	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第32回可換環論セミナー事前報告集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Shigeru Kuroda
2. 発表標題 Lectures on polynomial automorphisms in positive characteristic (1)-(8)
3. 学会等名 Jilin University (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shigeru Kuroda
2. 発表標題 Z/pZ-actions on the affine space: classification, invariant ring and plinth ideal
3. 学会等名 Virtual Commutative Algebra Seminar (Indian Institute of Technology Bombay) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shigeru Kuroda
2. 発表標題 Finitely generated polynomial subalgebras without finite SAGBI bases
3. 学会等名 MFO-RIMS Tandem Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 黒田 茂
2. 発表標題 Finitely generated polynomial subalgebras without finite SAGBI bases
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 黒田 茂
2. 発表標題 多項式環の位数pの自己同型の不変式環とプリンスイデアル
3. 学会等名 第17回多項式環論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 黒田 茂
2. 発表標題 Finitely generated polynomial subalgebras with infinitely many initial algebras
3. 学会等名 第16回多項式環論セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 黒田 基紀, 黒田 茂
2. 発表標題 Non-finite generation of the invariant ring for G_a -actions on the affine line
3. 学会等名 第16回多項式環論セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 黒田 茂
2. 発表標題 Determinant-fixing polynomial automorphisms: Existence of co-tame elements
3. 学会等名 第32回可換環論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 黒田 茂
2. 発表標題 Wildness and co-tameness for determinant-fixing polynomial automorphisms
3. 学会等名 第14回多項式環論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeru Kuroda
2. 発表標題 Wildness for determinantal polynomial automorphisms
3. 学会等名 第41回可換環論シンポジウム (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeru Kuroda
2. 発表標題 Wild automorphisms of the affine cone of a Segre variety
3. 学会等名 VIASM Sminar
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeru Kuroda
2. 発表標題 Finitely generated polynomial subalgebras without finite SAGBI bases
3. 学会等名 VIASM Sminar
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 黒田 茂
2. 発表標題 Finitely generated polynomial subalgebras without finite SAGBI bases
3. 学会等名 第15回多項式環論セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 黒田基紀, 黒田茂
2. 発表標題 被約でない可換環上の多項式環における指数写像
3. 学会等名 第12回多項式環論セミナー, 静岡大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 黒田茂
2. 発表標題 正標数の体上の多項式環の標数位数自己同型とその不変式環
3. 学会等名 第12回多項式環論セミナー, 静岡大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 黒田基紀, 黒田茂
2. 発表標題 G_a -actions on a non-reduced affine line
3. 学会等名 第40回可換環論シンポジウム, レクトーレ葉山
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 黒田茂
2. 発表標題 Determinant-fixing polynomial automorphisms
3. 学会等名 第13回多項式環論セミナー, 首都大学東京
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeru Kuroda
2. 発表標題 Determinant-fixing polynomial automorphisms
3. 学会等名 The 17th Affine Algebraic Geometry Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 A. van den Essen, S. Kuroda and A. Crachiola	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Birkhauser	5. 総ページ数 189
3. 書名 Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, New Results from the Beginning of the 21st Century, Frontiers in Mathematics	

〔産業財産権〕

〔その他〕

黒田 茂, ヒルベルトの第14問題, 『数学セミナー』(日本評論社)2019年11月号, 22-26
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	谷本 龍二 (Tanimoto Ryuji)	静岡大学・教育学部・准教授 (13801)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	小島 秀雄 (Kojima Hideo)	新潟大学・大学院自然科学研究科・教授 (13101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 17th Affine Algebraic Geometry Meeting	開催年 2019年～2019年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ベトナム	Institute of Mathematics	VIASM		
スイス	Universitat Bern			