

令和 4 年 5 月 26 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03221

研究課題名(和文)川島関数論に基づく非正指数の多重ゼータ値の研究

研究課題名(英文)Research on multiple zeta values of non-positive indices based on Kawashima functions

研究代表者

山本 修司 (Yamamoto, Shuji)

慶應義塾大学・理工学研究科(矢上)・特任准教授

研究者番号：20635370

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：多重ゼータ値とは、多重ゼータ関数の正整数点における値であり、様々な観点から盛んに研究されている。一方、正とは限らない整数を代入する場合、関数の特異性のため、その値の定義すら明らかではない。この研究では、主に川島関数という特殊関数の研究を通じて、非正指数の多重ゼータ値に対する新しいアプローチを探った。その結果、川島関数の新しい積分表示や、指数の複素変数化と解析接続、フルヴィッツ型多重ゼータ関数との関係式などの成果を得た。また有限・対称多重ゼータ値に関する金子ザギエ予想の非正指数への拡張も示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

学術的意義として、まず川島関数についてこの研究で明らかになった新たな性質・公式はそれ自身として興味深いものであり、今後の研究にも広がる可能性を持っている。また金子ザギエ予想はこの分野の重要な未解決問題の一つであるが、それが非正指数へ自然に拡張されたことは、多重ゼータ値の文脈において「正から非正への拡張」という問いが生産的な方向であり得ることを示唆している。一方、この研究の社会的意義を評価するのは困難であるが、日本人の名を冠する川島関数の研究を日本において継続・発展させることについて文化的意義を見出すことはできよう。

研究成果の概要(英文)：Multiple zeta values, the values of the multiple zeta function evaluated at positive integer points, are intensively studied from various viewpoints. On the other hand, it is non-trivial to define the values at (not necessarily positive) integer points, because of the singularity of the function. In this research, we explored a new approach to the multiple zeta values of non-positive indices, mainly through the studies of certain special functions, called the Kawashima functions. Then we obtained a new integral representation of the Kawashima function, the complex analytic extension with respect to the index and relations with the multiple zeta functions of Hurwitz type. Moreover, we also showed an extension of the Kaneko-Zagier conjecture on finite and symmetric multiple zeta values to non-positive indices.

研究分野：数論

キーワード：多重ゼータ値 多重ゼータ関数 川島関数

1. 研究開始当初の背景

多重ゼータ値とは、多重ゼータ関数の正整数点における値として定義され、その研究は近来非常な発展を遂げている。これに対し、正とは限らない整数点での値（非正指数の多重ゼータ値）も興味ある研究対象であるが、これらの点においてはしばしば多重ゼータ関数が特異性を有するため、その点での「値」を定義するだけでも非自明な問題となる。この問題について研究開始当時、繰り込み法や特異性解消といったいくつかのアプローチが提案されていた。

一方、多重ゼータ値と関連の深い特殊関数の一種として川島関数というものがある。川島関数は古典的なポリガンマ関数の多重化とみなしうる対象であり、ポリガンマ関数の無限大における漸近展開公式がリーマンゼータ関数の非正整数における値で表される。そこで、川島関数の漸近展開公式には非正指数の多重ゼータ値が関与するのではないかと、というのが研究開始時点での着想であった。

2. 研究の目的

川島関数について漸近展開公式をはじめとする公式・性質を探求すること、および非正指数の多重ゼータ値に対する新しいアプローチを与えることを目的とした。

3. 研究の方法

川島関数に対するある種の積分表示から出発して、特別な場合の漸近展開公式の計算や、フルヴィッツ型多重ゼータ値との関係式、指数を複素変数に拡張することなど、いくつかの応用を与えた。また逆に、フルヴィッツ型ゼータ値について二種類の正規化を定義し、その間の関係式を考察することにより、川島関数との関係を導いた。

また有限・対称多重ゼータ値(多重ゼータ値の変種)に関する小森靖氏の最近のアイデアと、古典的なフルヴィッツゼータ値の公式を組み合わせることにより、非正指数の有限・対称多重ゼータ値に応用した。

4. 研究成果

(1) 川島関数に対して積分表示を与え、そこから部分積分を繰り返すことで、川島関数を定義する指数がすべて2以上の場合には、漸近展開公式を計算することができた。この成果は Boston-Keio Workshop 2019 をはじめとするいくつかの研究講演において発表したが、指数が1を含む場合への一般化が得られなかったことから論文化は時期尚早と判断した。なお研究開始時点では認識していなかったことであるが、Costermans et al. (ISSAC'05 (2005))の手法により、少なくとも川島関数の変数が整数値を取りながら無限大に近づく場合の漸近展開公式は、各指数ごとに計算することができる。ただしこの方法によっても、一般の指数に対する漸近展開の明示的な公式は得られていない。

(2) (1)の積分表示に基づいて、川島関数を定義する指数を複素変数に拡張し、それらの変数に関する多変数整関数としての解析接続を与えた。またフルヴィッツ型多重ゼータ関数との関係式を証明した。これは井原健太郎氏・中村弥生氏との共同研究である。なお、より正確には、この研究の対象は川島関数そのものではなく、それと密接に関係する別種の関数(特別な名前は付いていない)であるが、その結果から容易に川島関数に対する同様の結果を導くことができ、あるいは川島関数に直接同様の手法が適用することもできるので、そこに本質的な違いはないといっている。

(3) 従来の多重ゼータ値における二種類の正規化(調和およびシャッフル)をそれぞれフルヴィッツ型多重ゼータ値に拡張し、それらの関係(正規化基本定理)を証明した。またその結果を応用して、川島関数を(正規化された)フルヴィッツ型多重ゼータ値で表す等式を示した。この研究は金子昌信氏・徐策氏との共同研究である。

(4) 小森(Tohoku Math. J. 73 (2021))により提出された、有限・対称多重ゼータ値に対する新しい結果を踏まえ、古典的な冪和の公式やフルヴィッツゼータ値の公式を用いることで、非正指数における値を正指数における値で表示する再帰的公式を与えた。これにより、正指数における有限・対称多重ゼータ値の対応を主張する金子ザギエ予想を仮定すると、非正指数においても同様の対応が成り立つことが示された。この研究は小野雅隆氏との共同研究である。

(5) 多重ゼータ値には級数表示と積分表示という二つの表し方がることが知られている。多重ゼータ値の性質を証明するにあたり、どちらの表示を用いるのがよいかは場合によって異なり、例えば双対関係式の証明には積分表示が適している、というのが従来の一般的な見解であった。これに対し、連結子(コネクタ)という新たな概念を導入することにより、級数表示に基

づく双対関係式の新証明を与えた。またこの手法を様々に拡張して、大野関係式、Hoffman 双対公式とその大野型拡張、一変数多重ポリログの双対関係式、およびそれらの q 類似の証明を得た。これらの成果の一部は関真一朗氏との共同研究である。

(6) 多重ゼータ値の代数構造には、級数表示に基づく記述（調和積）と積分表示に基づく記述（シャッフル積）の二種類が存在する。調和積を抽象化した代数的枠組みに関連して、Hoffman (J. Alg. Combin. 11 (2000)) および Hoffman-Ihara (J. Alg. 481 (2017)) によって導入・考察された、一変数冪級数に付随する線型作用素の理論を、多変数冪級数に対する構成へ拡張し、彼らの計算の一部に対して簡潔な再証明を与えた。

(7) Kaneko-Tsumura (Nagoya Math. J. 232 (2018)) によって導入された金子・津村型多重ゼータ関数を、 $r+r$ 個の複素変数を持つ関数に拡張し、前半の r 個と後半の r 個の変数の入れ替えに関する対称性 ($r=1$ かつ変数が整数値の場合に予想されていた等式の一般化) を示した。また正整数点における値について、通常の高重ゼータ値との関係を考察した。

(8) t 進対称多重ゼータ値を定義する無限級数を有限項で打ち切ったものを、二色根木という組合せ的構造の観点から考察することにより、これらの値がシャッフル関係式と呼ばれる関係式を満たすことを証明した。またこの手法の別の応用として、Mordell-Tornheim 型の t 進対称多重ゼータ値に関する基本的な考察を行った。これは小野雅隆氏、関真一朗氏との共同研究である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masanobu Kaneko, Ce Xu, Shuji Yamamoto	4. 巻 580
2. 論文標題 A generalized regularization theorem and Kawashima's relation for multiple zeta values	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 247 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.04.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shuji Yamamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shuji Yamamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Duality of one-variable multiple polylogarithms and their q-analogues	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shuji Yamamoto	4. 巻 556
2. 論文標題 Multivariable Hoffman-Ihara operators and the operad of formal power series	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 634 ~ 648
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.04.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masataka Ono, Shin-ichiro Seki, Shuji Yamamoto	4. 巻 7
2. 論文標題 Truncated t-adic symmetric multiple zeta values and double shuffle relations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-021-00241-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shuji Yamamoto	4. 巻 2019
2. 論文標題 A note on Kawashima functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publications Mathematiques de Besancon	6. 最初と最後の頁 151--163
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ichiro Seki, Shuji Yamamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Ohno-type identities for multiple harmonic sums	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/81028102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Seki Shin-ichiro, Yamamoto Shuji	4. 巻 -
2. 論文標題 A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 1~5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793042119500702	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 山本修司
2. 発表標題 川島関数の積和公式と多重ゼータ値
3. 学会等名 大岡山談話会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shuji Yamamoto
2. 発表標題 Sum formulas of Schur multiple zeta values of ribbon shape
3. 学会等名 JENTE Seminar（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shuji Yamamoto
2. 発表標題 Kawashima functions and multiple zeta values
3. 学会等名 BU-Keio Workshop 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shuji Yamamoto
2. 発表標題 Proofs of Hoffman's and Zhao's dualities via connected sums
3. 学会等名 Multiple zeta values and related topics（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shuji Yamamoto
2. 発表標題 Connected sum method for the duality of multiple zeta values and its generalizations
3. 学会等名 Hypergeometric Series, Mahler Measures, and Multiple Zeta Values (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shuji Yamamoto
2. 発表標題 A variant of multiple polylogarithms and relations on them
3. 学会等名 Japan-Taiwan Joint Workshop on Multiple Zeta Values 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	関 真一朗 (Seki Shin-ichiro)	青山学院大学・理工学部・助教	
研究協力者	小野 雅隆 (Ono Masataka)	早稲田大学・グローバルエデュケーションセンター・助教	
研究協力者	金子 昌信 (Kaneko Masanobu)	九州大学・大学院数理学研究院・教授	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	徐 策 (Xu Ce)	安徽師範大学・School of Mathematics and Statistics・ Associate Professor	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	Anhui Normal University			