

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：32615

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03222

研究課題名(和文)単連結距離正則グラフの研究

研究課題名(英文)Simply Connected Distance-Regular Graphs

研究代表者

鈴木 寛 (Suzuki, Hiroshi)

国際基督教大学・教養学部・名誉教授

研究者番号：10135767

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)： を距離正則グラフ(DRG)において、 $(, x, 6) = (, x)$ を満たすものとして、Classical DRGを特徴づけることを、幾何的または、グラフ理論的手法で試みたが、現在まで成功していない。一方、表現環に対応する、Terwilliger代数を用いた手法に関しては、進展すると同時に、より、精密な情報をえることが可能な、弱距離正則有向グラフの表現および、その構造の理論が、進展し、すでに、研究会では発表したが、論文も投稿準備中である。被覆に関する、代数的理論と、幾何的理論の関係の解明が待たれる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数的組合せ論は、組み合わせ構造を、代数的手法によって、研究するものであるが、同時に、組み合わせ的、幾何的手法と、代数的手法の関連を明らかにすることも含む。一つの問題を多様な視点から見ることは、一般的に重要であるが、そこにとどまらず、それらの手法の関連を明らかにすることは、問題を俯瞰的に見る視点を与えるためにも、重要であると思われる。本研究は、具体的な代数的組合せ論の課題のみを扱っているが、そのような研究の精神は、他にも応用ができると願っている。

研究成果の概要(英文)：We have tried to characterize Classical DRGs by assuming that $(, x, 6) = (, x)$ in distance regular graphs (DRGs) using geometric or graph-theoretic methods, but have not succeeded to date.

On the other hand, we have made progress in the theory of representations of weakly distance-regular digraphs and their structures, which can provide more precise information, as well as in methods using Terwilliger algebras corresponding to representation algebras. We have presented a part of the result at a seminar already and we are under the process of their publications. The relationship between algebraic and geometric theories of covering is still awaiting clarification.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：距離正則グラフ グラフの基本群 グラフの普遍被覆 代数的組み合わせ論 弱距離正則有効グラフ Terwilliger 代数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

1989年に A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier 共著の “Distance-Regular Graphs” [1] が出版されてから、距離正則グラフ(Distance-Regular Graph (DRG と略))の研究は大幅に進み、特に、球面上へのよい表現をもつ Q -多項式型 (Q -DRG と略) については、ある程度分類も進んでいる。DRG は、階数 1 の対称空間の離散版ともいわれ、2-point Homogeneous に対応する距離可移グラフ(Distance-Transitive Graph (DTG と略)) を含み、かつ、古典幾何から生ずるグラフが主たる部分を占め、また、符号理論や、デザイン理論などへの応用とも密接に結びついているため、「直径の大きな距離正則グラフの分類」は、代数的組み合わせ論または代数的グラフ理論の中心問題とも言われている。さらに、Terwilliger 代数 (Subconstituent Algebra と呼ばれる) の研究に端を発し、P. Terwilliger を中心としたグループの研究により、代数的に一般化された、Tridiagonal Pair, その表現環でもある、Onsager 代数、 q -Onsager 代数などを通して、量子群など、数理物理学との関係も、少しずつ解明されている。

本稿で「直径が大きい」というときは、原始的なものでは直径 7 以上、非原始的なものでは、直径 13 以上を考える。古典幾何から生じるグラフは、 Q -DRG の中でも非常によい Classical Parameter を持つクラスであるので、Classical DRG は、Classical Parameter をもつ距離正則グラフを指すものとする。

Γ を連結なグラフとする。頂点 $x \in V \Gamma$ を固定し、 x を含むすべての閉路に対して、長さ 2 の任意の閉路をいくつか加除して得られるものを同値とし、二つの閉路をつなげたもので積を定義した群を $\pi(\Gamma, x)$ で表し、 Γ の基本群と呼ぶことにする。その中で、既約な部分の長さが i 以下の閉路で生成した正規部分群を $\pi(\Gamma, x, i)$ と表す。この定義を用い、DRG を以下の三つのクラスに分ける。

1. $\pi(\Gamma, x, 6) = \pi(\Gamma, x)$ である DRG
2. Girth (既約な閉路の最短の長さ) も、Geometric Girth (三角形を含まない既約な閉路の最短の長さ) も 6 以下であるが、 $\pi(\Gamma, x, 6) \neq \pi(\Gamma, x)$ である DRG
3. Geometric Girth が 7 以上である DRG

3 のクラスの Q -DRG は存在しない。また、2 のクラスに属するものは pseudo-quotient という特別なパラメータを持つことが知られている [2]。さらにその結果を用いると、Classical DRG は、すべて 1 のクラスに含まれることが確認できる。また、知られている直径の大きな DRG で 2 のクラスに属するものは、Classical DRG の 2-Cover であり、3 のグラフは知られていない。3 の DRG は存在しないという予想は、DRG の Absolute Bound Conjecture と呼ばれる難問である。

二つのグラフ Γ, Δ において、頂点集合の間の写像 $\pi: V \Gamma \rightarrow V \Delta$ で、locally bijective ($x \in V \Gamma$ に隣接した頂点集合と $\pi(x)$ に隣接した頂点集合との間に π が全単射を引き起こすとき) で、 Γ が連結であるとき、 π を被覆写像 (covering) と呼ぶ。 C を Δ の閉路の集合としたとき、 C の閉路が、 π によって Γ の閉路に常に持ち上げられる (liftable) とき、 C -cover という。 C -cover に関して普遍被覆 (universal cover) が存在し、それらが同型であることが知られている [3,4]。また、 C -普遍被覆が、それ自身と同型であるグラフを C -単連結と呼ぶ。 C_i で長さが i 以下の閉路全体を表すと、 C_i -単連結であることと、 $\pi(\Gamma, x, i) = \pi(\Gamma, x)$ であることは同値である。

普遍被覆については、Incidence Geometry などでは、よく研究されているが、DRG においては殆ど研究されておらず、特に具体的な閉路の集合 C に関して、 C -単連結性については個々のグラフやその自己同形群の唯一性の判定に用いられる以外は研究されていない。 C -普遍被覆が有限になる条件も調べられていなかった。

普遍被覆に付随して、普遍代数、または表現環を調べることも一般的であるが、この方面の研究はまったくなされていない。しかし、Terwilliger 代数関連の研究が進展していることから、その関連を研究することも、有望である。

幾何においては、有向グラフの被覆は考えられていないが、距離正則グラフ (DRG) には、その自然な有向グラフ版である、弱距離正則有向グラフ (Weakly Distance-Regular Digraph (WDRDG)) も存在するので、その関連を調べることも有望だと思われる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、距離正則グラフ (DRG) の被覆、特に普遍被覆を考察することにより、DRG の構造を調べ、いくつかの難問の解決に寄与することである。

解決を目指した命題および取り組むべき課題を列举すると、以下のようになる。これらのうち、本研究課題の申請段階では、以下の A~D のうち、A、B のみを目的として列举していた。

- A. $\pi(\Gamma, x, 6) = \pi(\Gamma, x)$ である直径の大きな DRG で、任意の距離 3 の二点 x, y について、直径が 3 の、Classical DRG で、これらを含み、geodetically closed であるものが存在すれば、 Γ は、Classical DRG である。
- B. Geometric Girth が 7 以上で、直径の大きな DRG は存在しない。
- C. 対応する有効グラフが存在する場合への拡張。
- D. 表現環との関係の研究

なお、当初から、命題 A および命題 B は、超難問であることから、本研究期間では上の問題の解決が完成しない可能性も十分あると考え、A、B それぞれについて、部分的な解決を目標として掲げていた。

上記、A、B に加えて、研究を進めていく中で、2つの方向性にも、注目することになった。

一つ目は、対応する有向グラフが存在する場合への拡張である。DRG には、弱距離正則有向グラフ (WDRDG) という、自然な有向グラフへの拡張が定義される。すべての、DRG に対して、弱距離正則有向グラフが対応する訳では無いが、Hamming Graph については、より、構造が豊かな、Hamming 有向グラフが存在することが知られている。[5] 上の、A、B との関連については、不明であるが、DRG の構造の研究に関しては、有効である。

二つ目は、普遍被覆に関連して、表現環を考えることである。幾何や代数幾何などでは一般的な方法でもあり、A、B との関連においても、価値のある方向性である。Q-DRG の表現環の研究は、Terwilliger などを中心に、非常に、進展しているが、普遍被覆との関連の研究、および、A、B との関連の研究は未知数である。

これらは、基礎的な研究から始める必要もあり、本研究の目的として、どこまで含められるものかは、明確ではないこともあり、申請段階では、目的に含めてはいなかったことを付け加えておく。

3. 研究の方法

まず、すでに進行し、投稿し、修正中であった、論文 [6], [7] を出版することを最優先する。その後、目的で掲げた、A、B のための、部分的な解決を図る問題を整理して、[6], [7] を発表する、国内外の研究集会・シンポジウムで研究者から、助言、協力提供などを得ることを計画していた。

具体的には、申請書の、国内旅費、外国旅費の必要性にも以下のように記載していた。

国内: 東北大学、金沢大学、石川高専、愛知教育大学、静岡大学情報学部、大阪教育大学の研究者との定期的な研究打ち合わせを行う。2018 年度は、広島工業大学で開かれる研究集会に参加し、成果発表をする予定である。2019 年度以降は、年 3 回ほどの参加と成果発表とともに、日本数学会などより広い分野での成果公開を考えている。

海外: 二年に一度、イギリスで、British Combinatorial Conference (BCC) が開かれており、ヨーロッパの研究者の多くが集まるので、2019 年度、2021 年度に参加し、成果発表を行う。中国のいくつかの大学の研究者と研究交流を続けるが、新たに有限幾何(隣接幾何)の分野の研究者の意見を聞くことが重要であるので、ベルギーの Gent、オランダの Eindhoven、オーストラリアの、Perth に訪問し、必要に応じて、複数回訪問する。経費の効率を考え BCC の時期とあわせる。研究の進む方向性によっては、Wisconsin 大学も訪問する。滞在費は支援を受ける可能性もあり、滞在期間を調整する。謝金: 研究者にセミナーを依頼するため、少額謝金として計上している。

2019 年 3 月に、退職し、研究に十分な時間を使えるようになってから、ほどなく、2020 年度からは、コロナウイルス感染症で、海外はもちろん、国内の移動もできなくなり、予定を大幅に変

更せざるを得なくなった。本研究において、最も重要である、研究者との自由な交流（アイデアを出し合い、協力関係を築く）ことが全くというほどできなくなった痛手は大きく、どのように変更していくか、困難な時期が続いた。

以下、そのような時期に試行錯誤をしたことについて記す。

コンピュータを利用した計算：申請段階でも、GAP (Computer Software: Group Algorithm and Programming) を利用した計算を計画しており、移動せずに可能なものとして、GAP を用いた計算を行った。特に、Primitive Group の Library と、Association Scheme、Nauty、Digraph のパッケージを利用して具体例の計算を行った。

大学のデータベースを遠隔で利用する許可は得られたので、かなりの論文をダウンロードすることはでき、少し古い論文も含めて、学び直した。

Bookdown を利用した電子出版：以前から学んでいた、統計ソフトの R のパッケージである Bookdown を利用した電子出版が、特に、データサイエンスの分野では、飛躍的に進んでいたが、このシステムは、数学で利用する TeX システムを自由に利用できることから、数学の内容の出版にも活用できることを知り、すでに、手書きのものは、存在していた、Terwilliger Algebra に関する、Lecture Note を、電子出版することから、表現環についての、知識の整理を行った。

Zoom を用いて、いくつかのオンラインでの研究集会に参加したが、望んでいた交流は十分ではなかったため、少数の人数でのセミナーを、Zoom で行うこととし、特に、中国の北京師範大学などの研究者とのセミナーを何度か行った。

2023 年度からは、次第に、自由に国内、さらには、海外にも行くことができるようになり、まずは、早稲田大学の、Terwilliger Algebra のセミナーに参加し、大学院生も含めたグループで研究を行った。その結果の評価と課題の整理のため、2023 年度末には、Wisconsin 大学の、P. Terwilliger および、北京師範大学の、K. Wang および、Y. Yang などを探ね、研究交流を行った。

コロナウイルス感染症蔓延の期間には、適切な研究方法の変更がすぐにはできず、予定していたことは、できなかったことが多かったが、最後には、いくつかの進展もえられ、このような時期の適応の難しさとともに、適応の方法も学ぶことができたと思う。

4. 研究成果

Distance-regular graphs of large diameter that are completely regular clique graphs [6] において、すべての知られている無限系列の DRG の殆ど（三系列の例外を除く）は、Completely Regular Clique Graph (CRCG) の構造を持つこと、すなわち、点と直線からなる高い正則性をもつ 幾何構造が付随することを示した。従って、直径 2 や 3 の部分空間についての性質も利用可能であることを示した。研究の大半は、本研究期間以前に完成していたものであるが、多少の修正の後に、単著の査読付き論文として出版された。

Coverings and homotopy of a graph [7] は本研究を始めるきっかけとなった論文である。CRCG の構造をもつ DRG Γ の Incidence Graph として生じる Distance-Semiregular Graph (DSRG) Γ' の Girth の長さの閉路を C としたとき、 C -単連結となる条件を与え、それを用いて、いくつかの無限系列について、 C -単連結であることを示した。また、 Γ' の girth が 4 でなければ、つねに、 C -普遍被覆は有限であることを示した。研究の主要部分は、本研究の構想期間に完成していたものであるが、修正の後、単著の査読付き論文として出版された。

The Lecture Note on the Terwilliger Algebra [8] 講義録の電子出版である。1995 年に手書きのものを、注や解説をつけて出版してから、世界各地で複写版が読まれてきた。しかし、コロナウイルス感染症が落ち着きはじめたころから、この講義録を読んでいる早稲田大学の三枝崎ゼミに呼ばれて、大学院生の指導も依頼されたのを契機に、typeset し電子出版を行った。利用したのは、統計ソフトのパッケージ bookdown で、gitbook の改良版でもある。数学書の出版には、おそらく、まだほとんど利用されていないが、TeX システムを利用できることから、数学の出版にも向いている。コロナ禍で、研究交流が途絶えたときに、勉強していたシステムを使って、出版にこぎつけた。数学では、講義録の公開は進んでいるが、目次やリンクなどを考えると、HTML 版は有効であり、また、PDF も同時に作成できることから、印刷にも適している。GitHub で公開しているため、Pull Request を使った、編集依頼の受付も簡単にできることから、修正も膨大な時間を使うことなく可能である。数学書は、有償の紙媒体の本や、電子ブッ

クよりも、無償で提供する、このような電子出版物がより適している。Terwilliger Algebra という、すでに、標準になったものの最初の形をアクセスし易い形で提供できた価値は大きい。すでに、P. Terwilliger などが、リンクを示して、活用を呼びかけてくれている。

まだ、始めたばかりであるが、Weakly Distance-Regular Graphs についての、電子書籍をオンラインで提供する準備をしている。そのなかには、コロナ感染症蔓延の時期に計算機を用いて行った膨大な計算結果とともに、本研究の結果も、含める予定である。

The Terwilliger algebra of a Hamming digraph [9] は、早稲田大学のゼミで提示した問題の解決を論文としたものである。有向グラフの場合に、Terwilliger Algebra を考える事自体は、自然で、もっと早くに研究が始まって良かったと思っているが、本論文においては、3元体上のハミンググラフ $H(d,3)$ の辺に方向をつけて得られる WDRDG の Terwilliger Algebra の構造と、標準加群の既約部分加群への分解を決定している。Terwilliger Algebra が、 $sl_3(\mathbb{C})$ の構造をもつことを示し、 $sl_3(\mathbb{C})$ のリー代数としての表現の問題に書き換えて、問題を解決した。

現在の予稿には、加えていないが、表現環として非常に良いものが付随していることがわかり、本研究との関連においても、大きな飛躍が期待できる。

2023年3月には、これらの結果の評価と今後の研究計画を明確にするために、Wisconsin 大学の P. Terwilliger と、北京師範大学の K. Wang, B. Lv, Y. Yang 等を尋ねた。P. Terwilliger からは、高い評価を得られた。Tridiagonal Pair とは、別の対についての、大きな分野が開かれるのではないかと期待している。K. Wang のグループとの WDRDG の研究も進んでおり、研究期間の最後に、大きな飛躍が得られたと考えている。また、北京師範大学では、The Terwilliger algebra of a Hamming digraph に関する講演を行った。また、2004年6月の研究集会では、同様の講演を依頼されている。

研究方法のところでも書いたように、コロナウイルス感染症の蔓延で、予定していた研究計画通りに、進まなかった面が多く、今から考えると、もう少し、他の方法で、本研究が進められたかもしれないとの反省もあるが、研究目的にも書いた、B, C のような新たな視点が与えられ、それらに関連して、非常に大きな研究の扉が開かれたことは大きな成果だと考えている。

同時に、本来は、2022年度末までであった研究期間について、延長が認められ、研究が続けられたことには、非常に感謝している。コロナウイルス感染症の蔓延は未曾有の事態ではあったが、コンピュータの活用や、電子出版、Zoom でのセミナーで、ある部分を補うなど、今後の研究方法の広がりをも得ることができたことは幸いであった。

参考文献

1. A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
2. H. A. Lewis, Homotopy in \mathbb{Q} -polynomial distance-regular graphs, Discrete Math. 223 (2000), 189–206.
3. E. E. Shult, Points and Lines, Characterizing the Classical Geometries, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
4. J. R. Stallings, Topology of finite graphs, Invent. Math. 71 (1983), 551–565.
5. K.S. Wang and H. Suzuki, Weakly distance-regular digraphs, Discrete Mathematics 264 (2003), 225–236.
6. H. Suzuki, Distance-regular graphs of large diameter that are completely regular clique graphs, J. Algebr. Comb. 48 (2018), 369–404. <https://doi.org/10.1007/s10801-017-0808-9>.
7. H. Suzuki, Coverings and homotopy of a graph, Discrete Mathematics, 341 (2018), 1994–2010. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.03.028>.
8. P. Terwilliger, The Lecture Note on Terwilliger Algebra, edited by H. Suzuki based on the lecture given in 1993, published in 2023. <https://icu-hsuzuki.github.io/t-algebra/>
9. H. Suzuki, K. Uchida, T. Miezaki, The Terwilliger algebra of a Hamming digraph, preprint.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Suzuki Hiroshi	4. 巻 48
2. 論文標題 Distance-regular graphs of large diameter that are completely regular clique graphs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 369 ~ 404
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10801-017-0808-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Suzuki Hiroshi	4. 巻 341
2. 論文標題 Coverings and homotopy of a graph	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1994 ~ 2010
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2018.03.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Hiroshi Suzuki
2. 発表標題 The universal C-cover of a completely regular clique graph
3. 学会等名 The 9th Slovenian International Conference on Graph Theory - Bled ' 19 (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Lecture Note on Terwilliger Algebra
<https://icu-hsuzuki.github.io/t-algebra/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------