

令和 6 年 5 月 18 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03224

研究課題名（和文）半安定多様体の対数クリスタルコホモロジーと正標数対数多様体の変形理論

研究課題名（英文）log crystalline cohomologies of semistable varieties and deformation theory of log varieties in positive characteristic

研究代表者

中島 幸喜 (Nakajima, Yukiyoshi)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：80287440

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：正標数 p の固有正規交差対数多様体に対し、新しい重みフィルトレーション付き p 進複体を構成し、自然な積構造があることを示し、これが対数クリスタルコホモロジーのカップ積と両立することを示した。このフィルトレーション付き p 進複体が対数コホモロジーに誘導するフィルトレーションは、以前に本研究者が構成していた p 進Steenbrink複体が対数コホモロジーに誘導するフィルトレーションと擦れの部分を除けば、一致することも示した。

また、本研究では有限高さの対数Calabi-Yau多様体を定義し、それが W_2 まで持ち上がることを示した。さらに3次元の場合には対数Hodge-Witt分解を持つことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Grothendieckの壮大な重みのモチーフ論から、様々なコホモロジーの重みフィルトレーションはコホモロジーのカップ積と両立すると予想されている。特に様々な p 進コホモロジーに対しては、基礎体が有限体の時には数論的重みフィルトレーションが考えられるが、この両立性は直ちに成立することがわかる。本研究では正標数 p の固有正規交差対数多様体に対し、従来構成していた p 進Steenbrink複体が対数コホモロジーに誘導するフィルトレーションがカップ積と両立するか否かは非自明だが、新しい重みフィルトレーション付き p 進複体を構成することによって、この非自明なことを捻れを無視すれば、両立することを示した。

研究成果の概要（英文）：For a proper simple normal crossing log scheme in positive characteristic p , we construct a new weight-filtered complex and we have proved that it has natural product structure. We have proved that the filtration on the log crystalline cohomology induced by this new filtered complex is equal to the filtration on the log crystalline cohomology induced by the weight-filtered p -adic Steenbrink complex if one ignore the torsion of the log crystalline cohomology (the p -adic Steenbrink complex was constructed by me).

On the other hand, we have given the definition of the log Calabi-Yau variety in characteristic p with finite height and we have proved that it has a log smooth lift over W_2 and that it has the log Hodge-Witt decomposition.

研究分野：数論幾何学

キーワード：固有正規交差対数多様体 p 進Steenbrink複体 Hirsch拡大 重みフィルトレーション カップ積 対数Calabi-Yau多様体 Artin-Mazur高さ 対数Hodge-Witt分解

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数幾何の基本的言語として、1960年代にGrothendieckはスキーム論を展開し、特に固有射や滑らかな射に対し、様々なコホモロジーの大理論を建設した。永らくスキーム論の変革は起こらなかったが、1980年代末にFontaineとIllusieの着想に基づき、加藤和也はスキーム論を含む対数スキームの新理論を1989年に発表した。その後、多くの研究者が、対数スキームの重要な研究をしており、また、様々な問題に応用してきた。当研究者の研究は対数スキームの理論を本質的に使い、Berthelotのフィルとレーション付き複体の導来圏の理論を基本的言語として使い、Ogusによる収束アイソクリスタルの理論を使って、固有半安定多様体、もっと一般に対数点の族上の固有単純正規交差対数多様体の族(以下、 X と表す)の対数クリスタルコホモロジー(以下、 R と表す)の基本性質を示すことにある。また、固有超被覆を使うことによって、勝手な特異点を持つ固有多様体の無限小コホモロジーへの応用も展開しており、現在投稿中の長大なプレプリント(353ページ)「Limits of weight filtrations and limits of slope filtrations on infinitesimal cohomologies in mixed characteristics」において、混標数完備離散付置体上の固有多様体に対し、「幾何的極限重み」から定まる有限フィルトレーションが無限小コホモロジーに存在することを示していた。その構成には対数点の族上の X の対数クリスタルコホモロジー H の幾何的重み系列と幾何的重みフィルトレーションの構成が必須である。幾何的重みフィルトレーションの構成のために、筆者の理論の核心であるフィルタード導来圏の基本的対象物である (A, P) を構成した(A は複体、 P は幾何的フィルトレーションを表す)。フィルトレーション付き複体 (A, P) は対数多様体の対数微分形式の層から構成されるが、 A の次数と対数微分形式の次数が違うため、 A には積構造が定義できない。したがって、複体のレベルでは幾何的重みフィルトレーションと積構造の両立性: $P_k \times P_l \rightarrow P_{\{k+l\}}$ は意味を持たず、 R の幾何的重みフィルトレーションはカップ積と両立するか? という基本的な問いに対する答えは得られずにいた。一方、KimとHainは対数de Rham-Witt複体のHirsch拡大を使って、底スキームが標数 p の対数点上の固有対数正規交差多様体に対し、 (WH, P) という複体を構成し、積構造を定義し、 R の幾何的重みフィルトレーションはカップ積と両立することを示していた。一方、藤沢太郎は、底スキームが複素数体の対数点である場合は基本的なmixed Hodge 複体を構成し、 R の複素幾何的類似のコホモロジーの幾何的重みフィルトレーションはカップ積と両立することを示していた。

また、話題は全く異なるが、呼子笛太郎は正標数の完全体上のCalabi-Yau多様体に対し、新概念「擬分裂高さ」を定義し、擬分裂高さが有限ならば、長さ2のWitt環に持ち上がることを示した。系として、この多様体のホッジドラムスペクトル系列が E_1 退化することを示した(Deligne-Illusieの結果を使う)。さらに進んで、擬分裂高さと上記多様体のArtin-Mazur高さが等しいことを示した。この呼子の結果を対数化する試みさえ、研究当初は当研究者以外誰も思いつかなかった。

2. 研究の目的

本研究の主研究(以下、研究1と呼ぶ)では重みフィルトレーションとカップ積の両立性の上

【1 研究目的、研究方法など(つづき)】

記の間に完全な答えを得ることが目的であった。また、当研究者の予想である p 進強対数 Lefschetz 予想を p 進重みフィルトレーション込みで証明することも目的であった。もう一つの研究(以下、研究2と呼ぶ)では呼子の結果を対数化することが目的であった。

3 . 研究の方法

研究1では(A,P)とは全く異なる新しいフィルトレーション付き複体(H,P)を構成した。(H,P)も対数多様体の対数微分形式の層から構成されるが、Hの次数と対数微分形式の次数が同じであるため、(H,P)には位相幾何の場合と同じく、自然な積構造が入る。(H,P)の構成には位相幾何で用いられていたdgaのHirsch拡大をさらに一般化した導来PD-Hirsch拡大を定義し、その理論の応用として、(H,P)を構成した。さらに、対数点の族が単に対数点の場合に、我々が構成した(H,P)はKimとHainが構成した(WH, P)と標準的に同型であることを示せたので、我々の方法はKimとHainの方法の対数点の場合を対数点の族の場合の方法に拡張したことであることが判明した。ただし、KimとHainは対数de Rham-Witt複体を使用するのに対し、我々の手法は対数クリスタル的手法を使うので、より自然で、応用範囲も広く、使いやすい。

研究2では呼子が使用した定理、例えば、Serreの完全系列や桂-Oortの高次閉微分形式のコホモロジーの計算など、すべての基本的結果を対数化する必要がある。その結果として、呼子の議論の対数化が全て可能になる。

4 . 研究成果

研究1は論文「Hirsch weight-filtered log crystalline complex and Hirsch weight-filtered log crystalline dga of a proper SNCL scheme in characteristic $p>0$ 」として164ページの論文として纏めた。現在、雑誌に投稿中で、もし、アクセプトされれば、論文が長大であるため、論文ではなく、一冊の本として出版される予定である。

研究2は「Degenerations of log Hodge de Rham spectral sequences, log Kodaira vanishing theorem in characteristic $p > 0$ and log weak Lefschetz conjecture for log crystalline cohomologies」として79ページの論文として纏め、雑誌 European Journal of Mathematics において、2021年に出版された。

また、この研究に触発されて、呼子高さが有限である固有滑らかな対数多様体の対数 Hodge-Witt 分解について、当初予定になかった研究を実行し、「Artin-Mazur heights and Yobuko heights of proper log smooth schemes of Cartier type, and Hodge-Witt decompositions and Chow groups of quasi-F-split threefolds」の研究初めには予期していなかった予想外の論文を纏めることができ、雑誌 Journal für die Reine und angewandte Mathematik において、44ページの論文として、2022年に出版した

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yukiyoshi Nakkajima	4. 巻 787
2. 論文標題 Artin Mazur heights and Yobuko heights of proper log smooth schemes of Cartier type, and Hodge Witt decompositions and Chow groups of quasi-F-split threefolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik	6. 最初と最後の頁 1,44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukiyoshi Nakkajima, Fuetaro Yobuko	4. 巻 -
2. 論文標題 Degenerations of log Hodge de Rham spectral sequences, log Kodaira vanishing theorem in characteristic $p > 0$ and log weak Lefschetz conjecture for log crystalline cohomologies	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1537,1615
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukiyoshi Nakkajima	4. 巻 21
2. 論文標題 CONGRUENCES OF THE CARDINALITIES OF RATIONAL POINTS OF LOG FANO VARIETIES AND LOG CALABI-YAU VARIETIES OVER THE LOG POINTS OF FINITE FIELDS	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebra, Number Theory: Advances and Applications	6. 最初と最後の頁 1,51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18642/jantaa_7100122080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Yukiyoshi Nakkajima
2. 発表標題 Theory of Hirsch weight-filtered log crystalline complex
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2022（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukiyoshi Nakkajima
2. 発表標題 The action of the crystalline Weil-Deligne group on the infinitesimal cohomology in mixed characteristics
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中島幸喜
2. 発表標題 Artin-Mazur height, Yobuko height and Hodge-Witt cohomologies
3. 学会等名 東京大学大学院数理科学研究科理学部数学科・理学部数学科 代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中島幸喜
2. 発表標題 Artin-Mazur 's height and Yobuko 's height
3. 学会等名 Hakodate workshop on arithmetic geometry 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------