

令和 4 年 5 月 25 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03225

研究課題名(和文) 超一様分布数列のディオファントス近似とKontsevich-Zagier周期予想

研究課題名(英文) Diophantine approximation in low discrepancy sequences and the Kontsevich-Zagier period conjecture

研究代表者

平田 典子(河野典子)(HIRATA-KOHNO, Noriko)

日本大学・理工学部・教授

研究者番号：90215195

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題においては一様分布・超一様分布数列の考究に現れるディオファントス近似の手法を適用し、周期のひとつである多重対数が代数体上で一次独立になる条件を明示した。Sinnou DAVID氏(フランスソルボンヌ大学)、川島誠氏(日本大学生産工学部)を主とした国際共同研究を軸とするもので、科学研究費でのDAVID氏の招聘の際の討議の成果である。有理数1点でのs重対数に対し、sを動かしたときの値が有理数体上で一次独立になるための規準は知られていたが、先行研究では限られた体上の一次独立性のみであった。しかし本成果では有理数1点のみという条件を外し、基礎体を任意次数の代数体まで拡張することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多重対数は数論のみならず数学や物理学のあらゆる場に現れる周期である。また超一様・一様分布数列の研究も、乱数や擬似乱数などの研究にとって重要である。多重対数関数の代数的数における値は、自然対数で表される代数体のRegulatorの一般化として現れる数としても位置付けられ、素数分布の考察に力を発揮するRiemann zeta関数の値の性質を調べる際にも登場する。本研究課題では周期予想に現れる代表的な周期の例である多重対数について考察し、異なる点での多重対数が任意次数の代数体上で一次独立になるための判定規準を与えた。また超幾何級数を用いて、アーベル多様体の周期に対する超越近似についても考察した。

研究成果の概要(英文)：Diophantine approximation is one of basic methods to give a proof of the irrationality, the linear independence or to study the low discrepancy sequence in uniform distribution in Diophantine problems. It is known that Ch. Hermite constructed explicit simultaneous Diophantine approximations related to the exponential function to prove the transcendence of the number of Napier.

We now adapt this approximation method to prove a new linear independence criterion for several polylogarithms defined at several algebraic numbers. Polylogarithmic function is a natural generalization of logarithmic function, however, it has no homomorphism property like logarithmic function, then the usual tool to show the transcendence of logarithms does not work. Nevertheless, we succeeded in showing a precise criterion for the linear independence of several polylogarithms of distinct algebraic numbers, over an algebraic number field of arbitrary degree, relying on Pade approximations.

研究分野：数論

キーワード：超一様分布数列 多重対数 周期予想 超幾何級数 超越数 パデ近似 一次独立性 デイオファントス近似

1. 研究開始当初の背景

(1) Ch. HermiteとH. Padeによる「パデ近似」もしくは「エルミート-パデ近似」と呼ばれるディオファントス近似は、数論的関数、特に多重対数関数の数論的性質を調べる手法として用いられてきた。様々な超越関数の値の無理数性や超越性については多くの予想がたてられている。

しかしながら、超越関数特に多重対数関数の代数的数における値に関する無理数性に対する、数論的性質考察の統一的な手法や、超一様分布をもつ数列の研究における分布状況を示唆する方法を提案するような先行研究は、僅かしか存在していなかった。

(2) 一変数多重対数関数の数論的性質に関する先行研究には、E. Nikisin, T. Rivoalらによるものがある。特に Rivoalは、Yu. Nesterenkoの方法を用いて、多重対数を有理数体に添加したベクトル空間の次元の下からの評価を得ていた。しかしこの手法では無理数性や有理数体上での一次独立性は全く従わなかった。また超一様分布を記述することにも応用できなかった。

以上(1)(2)に対し、新規手法を提案する課題研究を開始した。

2. 研究の目的

上記の多重対数関数の値に関して、パデ近似の理論そのものの理論的な考察をおこなうことによって研究を発展させ、Kontsevich-Zagierの意味での典型的な周期である、多重対数の数論的性質を新たに証明する方法の構築が、最大の目的であった。G. Rhinらの異なる代数的数における対数関数に対するパデ近似の手法をヒントにして、多重対数の一次独立判定のための規準に拡張することを特に目的としていた。また、パデ近似の証明に頻発する行列式の絶対値の非零性を証明すること、そしてその下からの評価の新規手法の開拓が、根幹の課題であった。これらの方法を用いて p 進解析でのパデ近似に基づいた p 進ゼータ関数や、あるいはリーマンゼータ関数の正奇数での値の考究に関する構想を実現する目的も重要である。円周率に関する種々の展開に現れる数列については、超一様分布や一様分布を与えるかどうかさえ、実はあまりよくわかっておらず、これらの解明をおこなうという目的もあった。多重対数について得られる結果を、周期的係数を備えた級数展開で与えられる値の場合に拡張することも目的の一つであった。

3. 研究の方法

(1) フランスソルボンヌ大学教授 Sinnou David 氏、ストラスブール大学教授・ストラスブール数学研究所の所長である Y. Bugeaud 氏らとの共同研究を開始した。また、日本大学生産工学部助教の川島 誠氏との共同研究もおこなった。いずれにおいても、密な研究討議を実際に国内外に出張もしくは対面招聘することで実施することができた。特に S. David 氏とは、もしも最初の対面での日本への招聘がなかったら、到底この共同研究での成果は出せなかったであろうという点で、同意見である。行列式についての考察が特に困難であったが、この科研費での対面の招聘をもとにした議論のおかげで、コロナ下での隔離状態における zoom 討議も乗り切れた。

(2) 上述(1)の他にも国内外の研究者との意見交換、国内外で開催された研究集会における討議を経由して、多くの共同研究および論文執筆をおこなうことができた。カナダ、オランダ、フランス、ロシアなどの諸外国の研究者との研究討議も大きな果実を生むものになった。研究代表者はフランスの CIRM 研究所の科学コミッティーメンバーとして、2018年に研究集会をフランスで主催し、研究者を諸外国から招聘して直接の対面による研究討議を実施することもできた。

(3) さらに DARF セミナー (Diophantine Analysis and Related Fields) という名前の zoom セミナーを立ち上げ、ディオファントス近似周辺のトピックにおける様々な最新結果を持つ国内外の数学者や、上手にサーベイ講演のできる数学者を招いて議論することができた。日本人の若

い研究者に優れた講演を聞かせたり、自分自身の結果を述べさせて、多くの国際的なシニア研究者から重要な注意やアドバイスをもたらるような場にもなった。これは、将来を担うべき、若い日本の研究者にとっても、国内外のシニア研究者にとっても、非常に重要な研究方法になった。現在も継続して月に1回ほど実施している。

4. 研究成果

(1) まずディオファントス近似の基本手法であるパデ近似の方法に改良を加え、多重対数関数に適用させた研究を、S. David 氏及び川島誠氏と共におこなった。これは、行列式の非自明な下からの評価を従えるものである。いわゆる Lerch 関数におけるシフトが異なる場合に対しては特に難易度が高かったが、Type II 型の新しいパデ近似を確立することができた。この(1)の成果が決定的であったために、ドイツ Oberwolfach 数学研究所のクローズドな研究集会や、イタリア Leuca での研究集会で招待講演オファーを受けた。また実質的に全ての研究目的が達成できたため、最終年度繰上げによる成果のまとめをすることができた。これによって、Kontsevich-Zagier の構想に負う周期の代表的な例である多重対数の超越性（いわゆる周期予想のわかりやすい例に相当する）に向かって、大きく近づけたことになる。

(2) 整数において整数に近い値をとる整関数についてディオファントス近似に負う方法を適用させた、複素関数が多項式になるための条件を示した古津博俊氏（日本大学理工学部教授）との共同研究も出版した。さらに解析関数の値の一次従属性の決定条件を記述する考察に発展させることもできた。

(3) 対数一次形式におけるディオファントス近似の定数値を、詳しいパデ近似を活用して改良することができた。この近似の結果は、長い間待たれていたものである。詳しい値については投稿準備中である。

(4) Equi-distribution という概念がある。これは一様分布と同等の概念であり、数論的な点が稠密であるときにその稠密性のみならず、さらに詳しい分布状況を記述するものである。例えば無理数の整数 n 倍は、その整数 n をいくらでも大きくすると $\text{mod } 1$ で単位円上に稠密に分布するが、一様分布や Equi-distribution という用語は、単なる稠密性よりも詳しい情報を与えるものである。体の次数を上げたときに高さの小さい点が一様に分布するという一般的な結果が、ある種のトーラス上の場合について、1997年に Yuri Bilu によって証明され、関連研究がなされている。Equi-distribution を超一様分布の技術で発展させることが、本研究の目的の続編であった。研究成果としては、多重対数および関連する数論的な値において何一つ分からなかった状態に対して、第一歩としての値の無理数性とその一般化である一次独立性の判定規準の確立を成し遂げたことで、新たな言葉による研究開始が可能となったのである。これは新規の研究課題としての提案に相応しかつたために、Equi-distribution の枠組みにおいて多重対数や G 関数の値での類似の考察を抽象的パデ近似で扱う目的のもと、新しい基盤研究の科学研究費補助金を新規申請した次第である。対象とする数が超越数であること、超一様分布に関する成果が証明できれば画期的であるが、そのためには、基礎体の次数をいくらでも高く上げられるか否かということが重要であった。我々の判定基準では、この重要課題をクリアすることを初めて可能にすることができた。この問題の解決は D. Chudnovsky-G. Chudnovsky 兄弟やロシア学派によって達成し得なかった内容である。ちなみに Bilu の結果の定量化や一般化も存在するが、真の意味での Law-Discrepancy の評価は、世界中で試みられているにも拘らず、まだ確固たるものはない。多重対数の積についての考察が進められれば、超越性に対するアプローチも可能になるが、これについても今回、我々が得た新しい手法を適用するべく、Equi-distribution の枠組みでの抽象的パデ近似の手法を進展させるという新しい研究課題の提案に至った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima	4. 巻 in press
2. 論文標題 Linear forms in Polylogarithms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze	6. 最初と最後の頁 in press
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.202010_047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima	4. 巻 9 (4)
2. 論文標題 Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent?	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory	6. 最初と最後の頁 389-406
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/moscow.2020.9.389	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 K. Kurishima, Y. Suzuki, H. Nishibayashi, K. Suzuki, S. Tonegawa, Yukiko Washio, N. Hirata-Kohno and Yusuke Washio	4. 巻 2178
2. 論文標題 Ramanujan's contribution to approximate pi and visualization via Mathematica	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku (Kyoto University)	6. 最初と最後の頁 100-108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Noriko Hirata-Kohno	4. 巻 34
2. 論文標題 Diophantine Approximation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Exposition American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 205-229
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Akiyama, S. Nakamura, M. Ito and Noriko Hirata-Kohno	4. 巻 11
2. 論文標題 A key exchange protocol relying on polynomial maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics for Industry	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S2661335219500035	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 N. Hirata-Kohno, Y. Ishii, Y. Kurimoto, K. Kurishima, K. Suzuki, Y. Suzuki, Y. Washio	4. 巻 2142
2. 論文標題 Minkowski Convex Body Theorem towards Polya's Visibility Problem via Mathematica	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 42-52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H. Furutsu and N. Hirata-Kohno	4. 巻 144
2. 論文標題 Linear dependence criterion of almost integer valued functions:a generalization of the Polya-Pisot theorem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Research Institute of Science and Technology, Nihon University	6. 最初と最後の頁 12-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Hirata-Kohno, Y. Ishii, Y. Kurimoto, S. Shimawaki, K. Suzuki, Y. Washio	4. 巻 2105
2. 論文標題 Kronecker Approximation Theorem employing Mathematica	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 33-38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Y. Kurimoto, Y. Washio, S. Nakamura, K. Suzuki and N. Hirata-Kohno	4. 巻 66th Jsee
2. 論文標題 Schinzel's theorem on a circle via GeoGebra	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 66th JSEE ja	6. 最初と最後の頁 58-59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 杉本和希, 西林大樹, 川島誠, 鈴木潔光, 利根川聡, 鷲尾夕紀子, 平田典子	4. 巻 3
2. 論文標題 Visual approximation of continued fractions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 城西大学数学科数学教育紀要	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 The number of the solutions to unit equations by Pade approximation
3. 学会等名 Leuca 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 Pade approximation for hypergeometric functions and S-unit equations
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop Diophantische Approximationen, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 Linear independence criterion for values of hypergeometric functions
3. 学会等名 Moscow, Days of Transcendence, Russia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 How do we know the irrationality?
3. 学会等名 日本数学会研究集会 Women in Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Kurishima, Y. Suzuki, H. Nishibayashi, K. Suzuki, S. Tonegawa, Yukiko Washio, N. Hirata-Kohno and Yusuke Washio
2. 発表標題 Identities for π discovered by S. Ramanujan and visualization via Mathematica
3. 学会等名 RIMS Workshop, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 Linear forms in logarithms: contribution by Fel'dman and the linear independence of polylogarithms
3. 学会等名 Transcendence and Diophantine Problems, Moscow (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 Recent Progress toward Polylogarithm Conjecture
3. 学会等名 Algebraic Number Theory and Related Topics, RIMS Workshop, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N. Hirata-Kohno, Y. Ishii, Y. Kurimoto, K. Kurishima, K. Suzuki, Y. Suzuki, Y. Washio
2. 発表標題 Visibility problem via Minkowski convex body theorem and Mathematica
3. 学会等名 Software and Its Effective Use for Mathematics Education, RIMS Workshop, Kyoto University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 Linear forms in logarithms via Pad e approximations and their applications
3. 学会等名 Diophantine Approximation and Transcendence CIRM, Luminy, France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M. Kawashima and N. Hirata-Kohno
2. 発表標題 Linear independence of special values of logarithms via Pade approximations
3. 学会等名 Effective methods in Diophantine problems, Leiden, the Netherlands (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Akiyama, S. Nakamura, M. Ito and Noriko Hirata-Kohno
2. 発表標題 An HFE-based variant of a key exchange protocol employing multivariate polynomial maps
3. 学会等名 JSIAM Annual meeting
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Furutsu, Y. Ishii and N. Hirata-Kohno
2. 発表標題 Geometrical instructions employing GeoGebra on iPad and developments
3. 学会等名 Workshop on Instructions by Tex (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p> https://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/Profiles/40/0003941/profile.html 日本大学理学部教員情報 http://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/Profiles/40/0003941/profile.html Noriko HIRATA-Kohno's Home Page http://trout.math.cst.nihon-u.ac.jp/~hirata/ 日本大学研究者情報システム http://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/Profiles/40/0003941/profile.html Noriko HIRATA-Kohno's Home Page http://trout.math.cst.nihon-u.ac.jp/~hirata/ </p>
--

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ダヴィッド シヌー (DAVID Sinnou)	パリソルボンヌ大学・理学部・教授	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	川島 誠 (KAWASHIMA Makoto)	日本大学・生産工学部・助教 (32665)	
研究協力者	ブジョー ヤン (BUGEAUD Yann)	ストラスブール大学・理学部・教授	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 DARF (Diophantine Analysis and Related Fields) zoom Seminar	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 Diophantine Approximation and Transcendence, CIRM, Luminy, France	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Paris Sorbonne University	University of Strasbourg		
カナダ	University of Vancouver			
オランダ	Radboud University, Nijmegen	University of Leiden		
インド	Tata Institute of Fundamental Research	Chennai Mathematical Institute		