

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：32714

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03228

研究課題名(和文)代数曲線のガロア被覆を通してのフルビッツの問題の解決とK3曲面上の曲線の研究

研究課題名(英文)The solution of Hurwitz's problem through Galois covers of algebraic curves and study on curves on K3 surfaces

研究代表者

米田 二良 (Komeda, Jiryo)

神奈川工科大学・公私立大学の部局等・教授

研究者番号：90162065

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：数値半群がいつワイエルシュトラスであるか、すなわち1点付き代数曲線のワイエルシュトラス半群で実現されるか、この問題をフルビッツの問題と言うが、これについて二重被覆や三重被覆の分岐点を通して研究した。特に、ワイエルシュトラスでない数値半群の無限列を導手を固定して構成した。代数曲面上の1点付き代数曲線について研究した。研究対象は、射影平面、トーリック曲面、K3曲面である。それらにのっている1点付き代数曲線のワイエルシュトラス半群を計算をしたり、その特徴づけをした。また、それらの曲面にのらないワイエルシュトラス数値半群のタイプの例も挙げているが、特に、トーリック曲面については、初めての例である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数曲線(1次元)を調べるために次元を下げて、その上の点(0次元)を調べる。そのためには、点についての情報が必要になり、それが点のワイエルシュトラス半群である。どのようなワイエルシュトラス半群を持つかで代数曲線の特徴づける。また、ワイエルシュトラス半群を点の性質を忘れて拡張した概念が数値半群である。数値半群がワイエルシュトラス半群になることの必要十分条件を見つけることで、1次元の幾何学的性質の特徴づけることができる。これらに関して完全に解決はしていないが、多くの研究成果は得ている。さらに、いくつかの代数曲面(2次元)を調べるためにその上の1点付き代数曲線(1次元)も調べている。

研究成果の概要(英文)：What kinds of numerical semigroups are Weierstrass? Namely, what is the condition for a numerical semigroup to be attained by a pointed algebraic curves? This problem is called Hurwitz' Problem. We studied on this problem through the ramification points of double or triple coverings. Especially, in the case where the conductor of a numerical semigroup is fixed we constructed infinite sequences of non-Weierstrass numerical semigroups, i.e., numerical semigroups which cannot be attained by any pointed curves. We studied on pointed algebraic curves on algebraic surfaces. The research objects of the surfaces are the projective plane, toric surfaces and K3 surfaces. The Weierstrass semigroups of pointed algebraic curves on these surfaces were calculated and characterized. Moreover, we gave examples of Weierstrass numerical semigroups which cannot be attained by any pointed curves on these surfaces. Especially, the examples related to toric surfaces are the first ones.

研究分野：代数曲線と代数曲面

キーワード：代数曲線 ワイエルシュトラス半群 トーリック曲面 K3曲面 2重被覆 3重被覆 ガロア直線 数値半群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) フルビッツの問題とは、数値半群が代数曲線の点のワイエルシュトラス半群で実現されるかであった。Buchweitzはこの問題を否定的に解決した。すなわち、代数曲線で得られない数値半群を初めて与えた。Torresは、二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を研究することで、Buchweitzの方法では求めることが出来ない代数曲線で得られない数値半群を初めて与えた。これは、対称数値半群と二重被覆の関係をうまく使っている。本研究者は、BuchweitzやTorresの方法では見つけることができない代数曲線で得られない数値半群を与えた。その数値半群は、対称的でなく、導手が種数の2倍引く2である。

(2) 種数8以下のすべての代数曲線は、井出の結果により、あるK3曲面上に載っている。また、Reidは種数11以上の楕円曲線の二重被覆はK3曲面上にのらないことを示している。モジュライの次元の計算より、種数が高いとほとんどの代数曲線がK3曲面上にのらない。

(3) 本研究者は、数値半群から作られる代数閉体上の代数の定義イデアルとアフィン・トーリック多様体の定義イデアルが関係がつくとき、その数値半群は代数曲線から得られることを示している。ただ、アフィン・トーリック多様体を貼りあわせたトーリック多様体に乗る代数曲線のワイエルシュトラス半群の研究は今までない。

(4) 楕円曲線(非特異平面3次代数曲線)の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群は決定できる。非特異平面4次代数曲線の二重被覆についても本研究者と共同研究者との共同研究で決定されている。また、5次については、本研究者と海外共同研究者との共同研究で二重被覆の種数が大きい場合に決定されている。

(5) 射影直線の二重被覆のシグマ関数は、構成されているが、本研究者と共同研究者との共同研究で、三重被覆の場合にも分岐点のワイエルシュトラス半群の導手が種数の2倍引く1以上の場合に構成された。

(6) 平面代数曲線上のガロア点についての研究は吉原によって始められた。このガロア点の概念を拡張した弱ガロア・ワイエルシュトラス点とガロア点の関係を二重被覆を通して調べた結果が本研究者と共同研究者との共同研究で得られている。

2. 研究の目的

(1) 代数曲線の二重被覆および三重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を考えることでフルビッツの問題の解決に近づく。

(2) K3曲面上に載らない代数曲線のワイエルシュトラス半群の特徴づけをする。また、有理曲面(特に射影平面、重み付き射影平面、有理楕円曲面)上の二重被覆で、K3曲面になるものを調べ、その上にある非特異代数曲線で種数が高いものを調べ、そのワイエルシュトラス半群を調べる。

(3) 巡回被覆の総分岐点のワイエルシュトラス半群を持つ非特異代数曲線がトーリック曲面上に載っている場合のそのワイエルシュトラス半群の特徴づけをする。また、トーリック曲面上に載らない非特異代数曲線のワイエルシュトラス半群にはどのようなものがあるかを調べる。

(4) 次数が6以上の特異平面代数曲線の二重被覆の分岐点を考える。そして接線の次数が平面代数曲線の次数と一致している点または1引いた点の上にある分岐点のワイエルシュトラス半群を決定する。

(5) すべての代数曲線についてシグマ関数の構成方法を求める。その手法として、ワイエルシュトラス半群から得られるその代数曲線の方程式(ワイエルシュトラス形式)を使う。

(6) ガロア点の概念を高次元に拡張したガロア直線について、その本数を計算する。特に種数4の超楕円でない代数曲線を標準因子で3次元射影空間に埋め込んだ場合を解決する。

3. 研究の方法

令和2年3月以降、新型コロナの影響で、対面のシンポジウムの開催や研究打ち合わせの出張が全く出来なくなり、令和2年2月以前と令和2年3月以降では研究の方法が異なっている。また、令和2年度の前期は、新型コロナのために大学の授業等の対応で相当の時間が取られ、研究の時間がほとんど取れなかったことを言っておきたい。令和2年2月までは、研究協力者と共に対面の「代数曲線論シンポジウム」を開催し、代数曲線論の発展に寄与すると共に、研究集会で講演者や参加者と研究課題について議論した。また、半群関係のシンポジウム等で講演をし、講演課題について参加者と議論した。また、研究協力者の大学を訪問したり、研究協力者を本学に招待し、対面で研究課題について話し合った。海外研究協力者である大学(韓国)にも年2回訪問し、それぞれ一週間程滞在し、研究打ち合わせを滞在中は毎日行い、また講演もした。令和2年度の前期は、一部の研究協力者とは、メールとWebexを使い、論文を完成し、投稿し出版された。さらに研究課題の研究を単著で投稿し、出版されている。また、令和2年度の後期以降は、Zoomを使い、複数の共同研究者と共同研究を実施し、2本の論文を投稿し、改訂すれば出版するとの返事もらっている。また、3本の論文をほぼ完成し、近いうちに投稿する予定でいる。

さらに、2本の論文の概要も固まっています、これから執筆する予定でいる。ただ、出張が出来なくなって、その分の旅費を使わなくなったので、科研費を返還することになった。これから研究の目的(1)から(6)に対応して研究の方法を書く。

(1) 数値半群の導手が偶数の場合は二重被覆の考え方をを使って対称数値半群と類似のワイエルシュトラスでない無限列を作り、数値半群の導手が奇数の場合は三重被覆の考え方をを使ってワイエルシュトラスでない無限列を作る。また、二重被覆や三重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を調べて、フルビッツの問題の「数値半群がワイエルシュトラスであるための十分条件」を拡張し、そして「数値半群がワイエルシュトラスであるための必要条件」を狭めていく。

(2) 重み付き射影平面や有理楕円曲面上の二重被覆で、 $K3$ 曲面になるものを考え、その上にある非特異代数曲線で種数が高いものを構成し、そのワイエルシュトラス半群を調べる。また、Reid は種数 11 以上の楕円曲線の二重被覆は $K3$ 曲面上にのらないことを示しているが、種数 9, 10 の楕円曲線の二重被覆で $K3$ 曲面上に載るものを構成する。また、楕円曲線以外の二重被覆で $K3$ 曲面上に載らないものを見つける。

(3) 素数次巡回被覆の総分岐点のワイエルシュトラス半群を持つ非特異代数曲線がトーリック曲面上に載っている場合のそのワイエルシュトラス半群の特徴づけをする。また、素数次でない、偶数次巡回被覆についても調べてみる。また、非特異平面代数曲線の二重被覆がトーリック曲面上に載るかどうかを考えてみる。

(4) 次数が 6 または 7 の非特異平面代数曲線の二重被覆の分岐点を考える。そして、接線の次数が平面代数曲線の次数と一致している点または 1 引いた点の上にある分岐点のワイエルシュトラス半群を考察する。

(5) Kunz が開発した Complementary module の考え方をすべての非特異代数曲線について考える。この場合、非特異代数曲線はワイエルシュトラス曲線で考える。すなわち、無限遠点でワイエルシュトラス半群を指定し、そこから得られるその代数曲線の方程式である。この方程式に対して、Complementary module の概念を使い、シグマ関数の構成をする。

(6) 種数 4 の超楕円でない代数曲線を標準因子で 3 次元射影空間に埋め込んだ場合のガロア直線の本数をガロア群が巡回群の場合について決定する。その方法として、射影直線の 6 次までの巡回被覆の関数体の定義方程式と射影直線の自己同型群の有限部分群を詳しく調べる

4. 研究成果

番号(1)から(6)は、研究目的、研究方法の番号に対応している。ここでは、目的、方法に対応させて成果を述べることにする。

(1) 導手が種数の 2 倍引く 3 以下の場合に、ワイエルシュトラスでない数値半群の例は知られていなかったが、二重被覆と三重被覆を調べることで、導手を種数で表して固定した時にワイエルシュトラスでない数値半群の無限列を作ることができ、海外の雑誌で出版された。この結果はワイエルシュトラスでない数値半群が予想以上に多いことを示していて、フルビッツの問題を解くにあたって、新しい方向性を示していると考えられる。また、4 元生成の数値半群はすべてワイエルシュトラスかどうかは知られていないが、almost symmetric で、ある条件を満たすときは affine toric 多様体と結びつき、ワイエルシュトラスであることが証明できた。また、almost symmetric でない場合には、二重被覆との関係を調べることで、多くの場合にワイエルシュトラスであることが示せた。これらの結果は Zoom を使った研究集会で発表されている。「4 元生成の数値半群がすべてワイエルシュトラスである」か「ある 4 元生成の数値半群がワイエルシュトラスでない」かのどちらかが示せれば、フルビッツの問題を解くことに関して大きな進展になると思われる。

(2) $K3$ 曲面上にどのような種数の高い非特異代数曲線が載っているか、また、どの $K3$ 曲面にも載らない非特異代数曲線の特徴づけることは大変重要な問題である。この問題をワイエルシュトラス半群の言葉を使って表すことは研究協力者を含んだ我々以外ではなされていない研究であった。研究協力者と共に重み付き射影平面の二重被覆で $K3$ 曲面になる場合に、それに載っている二つのタイプの非特異代数曲線で、しかもワイエルシュトラス半群を計算した例を構成した論文が雑誌に掲載された。また、有理楕円曲面の二重被覆で $K3$ 曲面になる場合にその上に載っているいくつかの非特異代数曲線を構成し、ワイエルシュトラス半群を計算した論文を現在、執筆中である。また、楕円曲線の二重被覆以外にもどんな $K3$ 曲面にも載らない非特異代数曲線を見つけたので、その論文を現在、準備中である。

(3) $K3$ 曲面について考えていることをトーリック曲面についても考えてみる。すなわち、トーリック曲面に載っている非特異代数曲線の構成、また非特異代数曲線でいかなるトーリック曲面にも載らないものをワイエルシュトラス半群で特徴づける。このような研究は今までなされていなかった。研究協力者と共に、射影直線の素数次巡回被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群が、ある条件を満たすとき、トーリック曲面に載る必要十分条件をその分岐点のワイエルシュトラス半群の標準生成系を使った等式で示した。この論文は海外の雑誌に掲載された。また、上記と同様なことを射影直線の 10 以下の偶数次巡回被覆の場合にも示した。さらに、あるワイエルシュトラス半群を持つ非特異代数曲線が、いかなるトーリック曲面にも載らないことを示した。このような結果は初めてであり、トーリック曲面を研究するにあたって大変重要だと考える。これに関しての論文も海外の雑誌で出版された。

(4) 次数が6の非特異平面代数曲線の二重被覆の分岐点で、その分岐点が接線の次数が6の場合と5の場合に、二重被覆の種数が30以上の場合にワイエルシュトラス半群を海外研究協力者との共同研究で完全に決定した。そしてそれらを2つの論文に分けて海外の雑誌に投稿し、掲載された。また、次数が7の場合には、その分岐点が接線の次数が7の上に乗っている場合でワイエルシュトラス半群が5元以下で生成されている場合に、条件をつけてワイエルシュトラス半群を決定し、神奈川工科大学の紀要から出版された。この論文も海外共同研究者との共同研究である。

(5) 射影直線の3次巡回被覆について、ワイエルシュトラス曲線を使ってシグマ関数を構成した論文が研究協力者との共著の論文として出版された。シグマ関数を使って考えたヤコビの逆定理についての共同研究がロンドンの数学会のLecture Note Seriesに掲載された。また、射影直線の3次巡回被覆が退化した場合のシグマ関数についての共著の論文をarxivに掲載している。現在、ワイエルシュトラス曲線のComplementary moduleに関する共著の論文を執筆中である。また、この考え方を使ったシグマ関数の構成についての共著の論文も完成し、投稿する予定である。

(6) 種数4の超楕円でない代数曲線を標準因子で3次元射影空間に埋め込んだ場合のガロア直線の本数をガロア群が巡回群の場合について研究協力者との共同研究で決定した。それに関する論文をガロア群の位数が5以下と6の場合に分けて海外の雑誌に投稿した。これら両方の論文について、レフェリー・コメントに従って改訂すれば、受理される方向とのコメントが来ている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Jiryo Komeda	4. 巻 2193
2. 論文標題 Quasi-symmetric numerical semigroups on triple covers of curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS 講究録	6. 最初と最後の頁 1, 5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Jiryo Komeda	4. 巻 225
2. 論文標題 Weierstrass n-semigroups with even n and curves on toric surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 1, 23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2021.106759	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jiryo Komeda	4. 巻 103
2. 論文標題 Infinite sequences of almost symmetric non-Weierstrass numerical semigroups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Semigroup Forum	6. 最初と最後の頁 935, 952
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00233-021-10230-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Jiryo Komeda and Makiko Mase	4. 巻 43
2. 論文標題 Curves on weighted K3 surfaces of degree two with symmetric Weierstrass semigroups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tsukuba Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 55 69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21099/tkbjm/1571968821	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Seon Jeong Kim and Jiryo Komeda	4. 巻 56
2. 論文標題 Double covers of plane curves of degree six with almost total flexes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bulletin of the Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1159, 1186
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4134/BKMS.b180915	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Jiryo Komeda	4. 巻 2130
2. 論文標題 Infinite sequences of non-Weierstrass numerical semigroups with odd conductor	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS講究録	6. 最初と最後の頁 52, 56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Jiryo Komeda and Shigeki Matsutani	4. 巻 459
2. 論文標題 Jacobi Inversion Formulae for a Curve in Weierstrass Normal Form	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 London Mathematical Society, Lecture Note Series	6. 最初と最後の頁 383 404
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/9781108773355	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryo Kawaguchi and Jiryo Komeda	4. 巻 51
2. 論文標題 Weierstrass semigroups satisfying MP equalities and curves on toric surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 107, 123
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00574-019-00145-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Seon Jeong Kim and Jiryo Komeda	4. 巻 44
2. 論文標題 Weierstrass semigroups on double covers of plane curves of degree 7	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Research Reports of Kanagawa Institute of Technology Part B	6. 最初と最後の頁 29, 36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Jiryo Komeda	4. 巻 2096
2. 論文標題 Diagrams of numerical semigroups whose general members are non-Weierstrass	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kokuroku	6. 最初と最後の頁 54 58
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Jiryo Komeda	4. 巻 B-43
2. 論文標題 Non-Weierstrass numerical semigroups with high conductor	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Research Reports of Kanagawa Institute of Technology	6. 最初と最後の頁 39 43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Jiryo Komeda, Shigeki Matsutani and Emma Previato	4. 巻 109
2. 論文標題 The sigma function for trigonal cyclic curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Lett. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 423 447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-018-1116-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計11件(うち招待講演 0件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Jiryo Komeda
2. 発表標題 Quasi-symmetric numerical semigroups on triple covers of curves
3. 学会等名 RIMS Workshop "Logic, Language, Algebraic system and Related Areas in Computer Science (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Jiryo Komeda
2. 発表標題 Hurwitz's problem concerning almost symmetric numerical semigroups generated by 4 elements
3. 学会等名 形式言語とオートマトン研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jiryo Komeda
2. 発表標題 Curves on weighted K3 surfaces of degree two with symmetric Weierstrass semigroups
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jiryo Komeda
2. 発表標題 Weierstrass semigroups on double covers of plane curves of degree 7
3. 学会等名 Workshop "Algebraic system, Logic, Language and Related Areas in Computer Science II"
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Jiryo Komeda
2. 発表標題 Weierstrass semigroups which cannot be realized as semigroups of pointed curves on toric surfaces
3. 学会等名 形式言語とオートマトン研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 米田二良
2. 発表標題 Numerical semigroups of double covering type and tetragonal curves
3. 学会等名 形式言語とオートマトン研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jiryo Komeda
2. 発表標題 The quotient of a numerical semigroup with high conductor by two or three
3. 学会等名 DLT Satellite Workshop in Kyoto (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松谷茂樹、米田二良
2. 発表標題 Jacobi inversion formulae for a compact Riemann surface via Weierstrass form
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松谷茂樹、米田二良、Emma Previato
2. 発表標題 On function for the curve, $y^3=x(x-s)(x-b_1)(x-b_2)$ and its limit of $s \rightarrow 0$
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jiryō Komeda
2. 発表標題 Infinite sequences of non-Weierstrass numerical semigroups with odd conductor
3. 学会等名 RIMS Workshop "Algebraic system, Logic, Language and Related Areas in Computer Science"
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jiryō Komeda
2. 発表標題 On Weierstrass numerical semigroups generated by four elements
3. 学会等名 RIMS Workshop "Algebraic system, Logic, Language and Related Areas in Computer Science" (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	大淵 朗 (Ohbuchi Akira)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	松谷 茂樹 (Matsutani Shigeki)		
研究協力者	高橋 剛 (Takahashi Takeshi)		
研究協力者	春井 岳 (Harui Takeshi)		
研究協力者	渡邊 健太 (Watanabe Kenta)		
研究協力者	真瀬 真樹子 (Mase Makiko)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
韓国	Gyeongsang National University		