

令和 4 年 6 月 20 日現在

機関番号：37112

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03229

研究課題名(和文) 多変数モジュラー形式の合同、 p 進的性質の研究研究課題名(英文) Study of congruences and p -adic properties for modular forms with several variables

研究代表者

菊田 俊幸 (Kikuta, Toshiyuki)

福岡工業大学・情報工学部・助教

研究者番号：60569953

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：1. 法 p べきの作用素の像 Im の元の重さ(フィルトレーション)に関する評価式の検討を行い、特別な場合に結果が得られた。2. かなり一般の場合において、法 p 特異モジュラー形式は全て、テータ級数の一次結合で表されることを示された。レベルや特異階数などによっては、対応するテータ級数のレベルの特定がなされた。3. 基礎体や、重さなどが特別な場合のHermiteモジュラー形式がなす有理整数環上の次数付き代数の具体的な構造が決定された。4. 本研究期間以前より学術雑誌に投稿中であった論文で、本研究期間内に学術雑誌に掲載されたものが2件ある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果は、Serreによって展開された(1変数の) p 進モジュラー形式の理論が、どの程度平行して多変数化されるか、1変数と多変数の場合の違いを一部明らかにする。特に、多変数の場合にのみ成り立つ特有の事象の追究により、新たな理論の形成を担う。これにより、多変数の p 進モジュラー形式の理論の発展に寄与する。

研究成果の概要(英文)：1. An evaluation formula for the weight (filtration) of an element of the image Im of the mod p power $-$ operator was studied and results were obtained in some special cases. 2. In a fairly general case, we showed that all mod p singular modular forms are represented by linear combinations of theta series. In the cases of some levels and some singular ranks, the levels of the corresponding theta series were specified. 3. In the case where such as the base field and weights are special, the concrete structure of the graded algebra over the ring of rational integers formed by the Hermite modular forms was determined. 4. There are two papers that were in the process of submission to journals before this research period, but were published in journals during this research period.

研究分野：整数論

キーワード： p 進モジュラー形式 Siegelモジュラー形式 法 p 特異モジュラー形式 テータ級数 テータ作用素

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Serre は 1973 年の論文において、代数的整数論への興味から、 p 進モジュラー形式の理論を確立した。この理論は、Katz、肥田、Wiles、Coleman などにより拡張され、今日、肥田理論と呼ばれる理論にまで発展している。ここ 20 年程で、報告者、Boecherer、長岡、竹森などにより、Serre が定義した p 進モジュラー形式の概念の多変数化が試みられるようになった。

報告者はこれまで

- Serre が展開した p 進モジュラー形式の理論の、Siegel モジュラー形式などへの多変数化
- 一変数の場合との主張や手法の違いの明確化

を目指してきた。本研究では、特に以下の解明を急いだ。

Θ作用素 p 進モジュラー形式の理論や、その Galois 表現への応用の中で、Ramanujan の θ 作用素が重要な役割を果たしている。報告者のこれまでの研究においても、Serre の理論の多変数化の研究の一環として、Siegel モジュラー形式の場合に拡張された Boecherer-長岡の Θ 作用素について調べてきた。分かっていないことが多く、報告者がもつ未証明の予想も多数ある状況であった。

法 p 特異性 Serre が示した定理により、1 変数モジュラー形式は次を満たす。

「定数項以外の Fourier 係数が p ベキで割れるならば、定数項も p ベキで割れる。」

彼はこれを Eisenstein 級数に適用し、総実代数体上の p 進 L 関数を構成した。報告者は、 p 進 Siegel モジュラー形式の研究(2016 年の論文)において、この性質の多変数版を満たさない奇妙な例を発見した。それを「法 p 特異モジュラー形式」と名づけ、ここで新しい概念が定義された。この論文では、多数の応用例を示したが、それ自体の正体は不明であった。その後、長岡、Schulze-Pillot、竹森、兒玉などにより、 $\text{Ker } \Theta$ のもつ性質がいくらか明らかにされた。 $\text{Ker } \Theta$ は法 p 特異性とも関わり、したがって「法 p 特異モジュラー形式」の情報が得られつつあったとも言える。しかしながら到底十分ではなく、迅速な解明が待たれる状況であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、 Θ 作用素の解明と法 p 特異モジュラー形式の解明であった。具体的な目標は以下の通りであった。

- (1) $\text{Ker } \Theta$ や $\text{Im } \Theta$ の元の重さ(フィルトレーション)に関する性質の解明。
- (2) 法 p 特異モジュラー形式全体のなす空間の生成元、関係式などの具体的構造の解明。

3. 研究の方法

様々な試行錯誤の後に、結果として本研究に進展をもたらした主な(理論的)方法は下記の通りである。

- 法 p 特異モジュラー形式の抽象的 Strum 型境界の存在の利用
- 北岡によるテータ級数の変換公式の一般次数への拡張とその応用

- Katz による q 展開原理のレベルが p で割れる場合への拡張とその応用
- トレース写像の利用
- 報告者等によって与えられていた Strum 型境界の利用

本研究では、効率的な研究、新しい発見、現象の解明を目的に数式処理ソフトによる数値実験を行った。具体的には、Eisenstein 級数、井草の生成元、テータ級数などの Fourier 係数の計算を、数式処理ソフトを用いて実行し活用した。Siegel-Eisenstein 級数には Eichler-Zagier の公式、Hermite-Eisenstein 級数には Krieg の公式、井草のカスプ形式には青木-伊吹山の行列式表示の公式を用いて、計算プログラムを自作し使用した。テータ級数の Fourier 係数には 2 次形式の表現数の組合せ論的計算を行った。

以上の研究は、情報収集や研究討論を目的に、研究協力者の招聘・訪問を行いながら実行した。実際、Siegfried Boecherer 氏(マンハイム大学)、兒玉浩尚氏(常葉大学)、竹森翔氏(マックスプランク研究所(当時))、長岡昇勇氏(近畿大学)による研究協力を受けた。

4. 研究成果

(1) 法 p ベキの Θ 作用素の像 $\text{Im } \Theta$ の元の重さ (フィルトレーション) に関する評価式の検討を行い、下記に述べる特別な場合に結果が得られた。次数 1 の場合は Chen-Kimng の結果であり、一般次数への拡張を目指してきた。進捗状況の説明のため、 $q[m]$ を「 p の m 乗」とする。次数 n 、法 $q[m]$ の Θ 作用素について、以下の場合に結果が得られた。

- ◆ 「 $(m,n) = (\text{一般}, 1)$ 」 (Chen-Kimng の別証明)
- ◆ 「 $(m,n) = (2, \text{一般})$ 」 の場合

Chen-Kimng の証明は、次数 1 の場合の特殊性 (準 (quasi) モジュラー形式の利用) に強く依存し、そのままでは多変数化が出来ない。下記の存在を示すことで、多変数化が可能となることが分かった。

「重さ $2(p-1) \cdot q[m-1]$ のレベル 1 のモジュラー形式であって、Fourier 展開が

法 $q[m]$ で 1 であり、 Θ 作用素を施すと法 $q[2m]$ で 0 になる。」 … (存在問題)

さらに、この存在問題の解決には、次の予想を示せば良いことが分かっている。

「レベル 1 の Eisenstein 級数の変数部分を $q[m]$ 倍したものが、存在問題のモジュラー形式と合同であろう。」 … (予想)

レベルを下げる効果のあるトレース写像を駆使することにより、上記の (m,n) の場合には、この予想を証明済である。今後の報告者等の研究により、全ての (m,n) の場合の解明が期待される。

以上は、Siegfried Boecherer 氏、および、一部は竹森翔氏との共同研究による成果である。

(2) 2016 年の Boecherer 氏との共著の論文の中で、「法 p 特異モジュラー形式」の新しい概念を定義した。定義した当初より、「全ての法 p 特異 Siegel モジュラー形式は、2 次形式に付随するテータ級数たちの一次結合で表すことができるであろう。」との予想を立てていた。本研究により、以下のことが分かり、この予想はかなり一般の場合に示された。(ただし、細かい条件は省略する。)

- レベル、次数、特異階数がかなり一般の場合に、全ての法 p 特異モジュラー形式は有限個の 2 次形式のテータ級数たちの一次結合で表される。
- さらに、特異モジュラー形式のレベルが 1 の場合には、2 次形式のレベルは p ベキ

である。

- 次数 3 以上、特異階数 2、重さが可能なものの最小の場合には、それらの 2 次形式のレベルは丁度 p である。

上記の証明に用いるために、以下の 2 点についても考察し成果が得られている。

(A) Katz によって与えられた q 展開原理を、レベルが p で割り切れる場合に拡張。

(B) 北岡によって与えられたテータ級数の変換公式を、次数一般の場合に拡張。

以上の研究は全て、Siegfried Boecherer 氏との共同研究による成果である。現在、細部の議論の確認、改良の可能性の追及、及び論文執筆作業の段階であるが、同時に法 p ベキの場合への拡張についても検討中である。特に、法 p ベキの場合にまで拡張できれば、長岡、桂田・長岡、報告者・長岡等による p 進 Siegel-Eisenstein 級数の保型性の証明の別証明への応用が可能になる。今後の研究により、この段階にまで発展させることを目指す。

(3) 基礎体が Gauss 数体であり、次数が 2、重さが 4 の倍数の対称的 Hermite モジュラー形式がなす有理整数環上の次数付き代数が、24 個のモジュラー形式で生成されることを示した。この結果の応用として、素数 2、3 の場合の上記のモジュラー形式に対する Sturm 型の境界を与えた。尚、素数が 5 以上の場合の Sturm 型の境界については、報告者等の本研究機関以前の結果により既に与えられていた。以上の結果は、上記のモジュラー形式の Fourier 係数や関係式などの計算を容易にする効果を与える。報告者の今後の研究に役立てられる。

(4) 報告者の本研究機関以前の論文により、次数 2 の偶数重さの Siegel モジュラー形式の場合に、法とする素数が 2、3 の Sturm 型の境界について考察し、成果が得られたように見られた。しかしながら、竹森氏によって、その証明の議論中に間違いがあることが指摘された。その後、彼との共同研究により、元の議論とは全く異なる方法を用いて、証明を与え直すことができた。同時に奇数重さの場合について考察し、実際に成果が得られた。奇数重さの場合には、さらに、境界の最良性についても言及した。この結果は、Fourier 係数の数値例を、モジュラー形式としての合同の証明に結びつける効果がある。数値実験を用いた研究に威力を発揮する。

以上は竹森翔氏との共同研究による成果である。ただし、この成果をまとめた論文は、本研究期間以前から学術雑誌に投稿中であった。本研究期間中に修正指示があり対応した結果、学術雑誌に掲載された。

(5) 重さが素数 p に比べ十分小さい場合に、法 p テータ作用素の核 $\text{Ker } \Theta$ の元の重さが満たすべき性質が分かった。この結果の応用として、Boecherer、Schulze-Pillot、長岡、竹森、兒玉などにより既に構成されていた具体例が、重さ最小のものであることが示された。また膨大な量の数値例を計算することにより、 p が大きい場合には、上記性質が成り立たない例が存在することが分かった。それらを基に、重さに関する新たな予想を提唱した。

以上は Siegfried Boecherer 氏、竹森翔氏との共同研究による成果である。ただし、この成果は本研究期間以前より得られていたものである。本研究期間中に学術雑誌に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Toshiyuki Kikuta	4. 巻 89
2. 論文標題 A ring of symmetric Hermitian modular forms of degree 2 with integral Fourier coefficients	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg	6. 最初と最後の頁 209-223
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12188-019-00205-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiyuki Kikuta, Sho Takemori	4. 巻 291
2. 論文標題 Sturm bounds for Siegel modular forms of degree 2 and odd weights	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 1419-1434
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-018-2213-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Siegfried Boecherer, Toshiyuki Kikuta, Sho Takemori	4. 巻 70
2. 論文標題 Weights of the mod p kernels of the theta operators	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 241-264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/CJM-2017-014-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 菊田俊幸
2. 発表標題 A ring of symmetric Hermitian modular forms over Z
3. 学会等名 マンハイム大学数学講演会（マンハイム大学）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 菊田俊幸
2. 発表標題 A ring of symmetric Hermitian modular forms over Z
3. 学会等名 Days of Modular Forms (フーリエ研究所) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 菊田俊幸
2. 発表標題 整数のFourier係数をもつHermiteモジュラー形式環の構造について
3. 学会等名 九大代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

FIT 福岡工業大学 研究者情報 https://www.fit.ac.jp/research/search/profile/id/229 菊田俊幸のホームページ http://kikuta.yohamanzokuja.com/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	マンハイム大学			