

令和 4 年 6 月 4 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03235

研究課題名（和文）ヘッケ固有値の漸近公式とアーサー跡公式の研究

研究課題名（英文）Asymptotic formula of Hecke eigenvalues and research of Arthur trace formula

研究代表者

若槻 聡 (Wakatsuki, Satoshi)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：10432121

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では数論における保型形式のヘッケ固有値に関する研究を行なった。数論とは自然数や素数の持つ様々な性質を研究する分野であり、保型形式とは非常に高い対称性を持つ不思議な関数たちのことで、ヘッケ固有値とはそれらから自然に生じる数の列のことである。ヘッケ固有値は数論的に非常に面白い性質を持っており、ヘッケ固有値の古典的な代表例としてはラマヌジャンのタウ関数が挙げられる。本研究の主要な成果は、保型形式の自然な族を考えることで、その固有値の分布に関する様々な結果を証明したことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

保型形式の族のヘッケ固有値の分布はブランシュレル測度や佐藤-テイト測度に従うことが予想されており、様々な場合に証明されている。ヘッケ固有値の漸近公式の一般化と精密化を推進することで、ヘッケ固有値の分布の性質をより統一的に明らかにすることが本研究の目的であった。実際、本研究の成果によって、その一般化と精密化の両方についてヘッケ固有値の漸近公式の研究を大きく進展させることができた。

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied Hecke eigenvalues of automorphic forms in number theory. Number theory is a field that studies various properties of natural numbers and primes, automorphic forms are mysterious functions which have high symmetry, and their Hecke eigenvalues are sequences of numbers which naturally arise from them. Hecke eigenvalues have very interesting number-theoretic properties, and a classical example of Hecke eigenvalues is Ramanujan's tau function. A major result of our research is that we have succeeded to prove various results on the distributions of their eigenvalues by considering natural families of automorphic forms.

研究分野：代数学

キーワード：数論 保型形式 跡公式 ヘッケ固有値

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

保型形式とはリー群の離散商上に定義されるラプラス作用素の固有関数のことである。保型形式の空間上にはラプラス作用素だけでなく、離散群を用いて定義されるヘッケ作用素と呼ばれる線形作用素が存在している。このラプラス作用素とヘッケ作用素は同時対角化可能であり、これらの作用素の固有関数のことをヘッケ固有関数と呼び、ヘッケ作用素の固有値のことをヘッケ固有値と呼ぶ。このヘッケ固有値は非常に面白い性質を持っており、様々な整数論的な対象に結びつくことが知られている。そのため、数論における保型形式のヘッケ固有値の研究の歴史は長く、ヘッケ固有値の性質を明らかにすることは大きな興味の対象となっており、現在でもヘッケ固有値に関わる新たな発見や未知の問題の提起が行われている。

本研究の研究開始当初、保型形式の族に関するヘッケ固有値の分布に関する Shin と Templier の研究成果が大きな話題になっていた。実際、彼らは初めてヘッケ固有値の分布に対して一般的な定式化を与えることに成功していた。しかしながら、彼らの証明したヘッケ固有値の漸近公式には改良の余地が非常に多くあり、ヘッケ固有値の分布の性質をより統一的に明らかにするためには、更なる精密化と、更なる一般化が求められていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上述のヘッケ固有値の漸近公式の精密化および一般化を証明することであった。つまり、簡約代数群の正則カスプ形式およびマース波動形式に関するヘッケ固有値の漸近公式を剰余項の評価付きで与えることである。さらに、得られた漸近公式を用いることによって、ヘッケ固有値の等分布定理を導き、保型 L 関数の低い位置の零点の統計的な研究を行った。そして、様々な保型形式の族に対するヘッケ固有値の漸近公式を導き、さらに漸近公式を導くための新たな理論の構築を目指していた。

3. 研究の方法

目的の漸近公式を得るためには跡公式などの基礎理論を深める研究が求められていた。本研究では上述の研究目的の達成のために、次の二通りの方法で解決を目指した。

フーリエ積分作用素を用いる手法：フーリエ積分作用素とヘッケ作用素を組み合わせることでヘッケ固有値の漸近公式を導く手法を開発することを計画していた。従来の研究では主に跡公式を用いていたため、フーリエ積分作用素を使うことは研究方法として斬新なものであった。

跡公式を用いる手法：アーサー跡公式の幾何サイドの大域係数と概均質ゼータ関数との関係を明らかにすることで、概均質ゼータ関数の性質を使って漸近公式を導くことを想定していた。従来の研究と同様に跡公式を用いるが、概均質ゼータ関数を用いる点で新しい試みであった。

4. 研究成果

の研究方法については狙い通りの成功を収めた。次の2篇の論文[1], [2]において、フーリエ積分作用素とヘッケ作用素を用いた保型形式の研究の成果を発表した。

引用文献

[1] P. Ramacher, S. Wakatsuki, Subconvex bounds for Hecke-Maass forms on compact arithmetic quotients of semisimple Lie groups (with P. Ramacher), Math. Z. 298 (2021), 1383--1424.

[2] P. Ramacher, S. Wakatsuki, Asymptotics for Hecke eigenvalues of automorphic forms on compact arithmetic quotients (with P. Ramacher), Adv. Math. 404 Part A (2022), 108372.

実際、文献[2]において、フーリエ積分作用素とヘッケ作用素を組み合わせることで、コンパクトな離散群に対する保型形式のヘッケ固有値の漸近公式を完成された形で証明することに成功した。証明には Harish-Chandra の軌道積分の極限公式を応用することができたので、技術的な側面でも大きな進展を得た。

次に の研究においては、正則な保型形式の代表例である正則ジーゲルカスプ形式の族およびマース波動形式の族についてのヘッケ固有値の漸近公式を研究した。正則ジーゲルカスプ形式の場合に関しては、当初の計画の通り跡公式を巧みに用いることで漸近公式の証明を概均質ゼータ関数の性質に帰結させることに成功した。その結果、様々な漸近公式を得ることに成功し、更に上述の等分布定理や L 関数の低い位置の零点の分布についても成果を得ることができた。次の論文[3], [4], [5]において、それらの成果を公表している。

引用文献

- [3] H. H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4 , *J. Inst. Math. Jussieu* 19 (2020), 351--419.
- [4] H. H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, Equidistribution theorems for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4 ; Hecke fields and n -level density, *Math. Z.* 295 (2020), 917--943.
- [5] H. H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, Equidistribution theorems for holomorphic Siegel cusp forms of general degree: the level aspect, *arXiv:2106.07811*, 2021.

[3]ではアーサー跡公式の大域係数と概均質ゼータ関数の関係を用いて漸近公式を導いた。[4]では様々な応用を推進し、[5]においては次元公式と概均質ゼータ関数の関係をヘッケ作用素の場合に一般化することで一般次数に関する漸近公式を証明している。

の研究においては、上記の正則保型形式の場合だけでなくマース波動形式についても研究を行っていた。実際、その漸近公式の証明に向けて、一般階数の斜交群とユニタリ群についてアーサー跡公式の大域係数と概均質ゼータ関数の関係を研究していた。残念ながら下記の文献[6]、[7]においてマース波動形式に関しては目標の漸近公式を先に達成されてしまった。

引用文献

- [6] T. Finis, J. Matz, On the asymptotics of Hecke operators for reductive groups, *Math. Ann.* 380 (2021), 1037--1104.
- [7] T. Finis, E. Lapid, On the remainder term of the Weyl law for congruence subgroups of Chevalley groups, *Duke Math. J.* 170 (2021), 653--695.

[6]と[7]の研究では一般的な漸近公式を証明していたが、本研究の方法とは異なっており、我々が取り組んでいたアーサー跡公式の大域係数の研究を回避していた。先を越されてしまいアーサー跡公式の幾何サイドの大域係数を研究する意味が弱くなってしまったが、[6]と[7]における跡公式の新たな技術革新を我々の研究に取り入れることで新たな研究の方向性を見出すことができた。実際、[6]と[7]の技術を使うことで保型L関数の特殊値の漸近公式の研究への方向転換に成功したため、我々の研究の発展につながっている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kim Henry H., Wakatsuki Satoshi, Yamauchi Takuya	4. 巻 295
2. 論文標題 Equidistribution theorems for holomorphic Siegel modular forms for Sp_{4n} ; Hecke fields and n -level density	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 917 ~ 943
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-019-02378-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kim Henry H., Wakatsuki Satoshi, Yamauchi Takuya	4. 巻 19
2. 論文標題 AN EQUIDISTRIBUTION THEOREM FOR HOLOMORPHIC SIEGEL MODULAR FORMS FOR Sp_{4n} AND ITS APPLICATIONS	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 351 ~ 419
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S147474801800004X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Wakatsuki Satoshi	4. 巻 340
2. 論文標題 The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1012 ~ 1066
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2018.10.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hoffmann Werner, Wakatsuki Satoshi	4. 巻 255
2. 論文標題 On the Geometric Side of the Arthur Trace Formula for the Symplectic Group of Rank 2	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1 ~ 88
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1224	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Finis Tobias, Hoffmann Werner, Wakatsuki Satoshi	4. 巻 1
2. 論文標題 The Subregular Unipotent Contribution to the Geometric Side of the Arthur Trace Formula for the Split Exceptional Group G_2	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Geometric Aspects of the Trace Formula	6. 最初と最後の頁 163 ~ 182
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-94833-1_5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kim Henry H., Tsuzuki Masao, Wakatsuki Satoshi	4. 巻 34
2. 論文標題 The Shintani double zeta functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 469 ~ 505
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2020-0251	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ramacher Pablo, Wakatsuki Satoshi	4. 巻 404
2. 論文標題 Asymptotics for Hecke eigenvalues of automorphic forms on compact arithmetic quotients	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108372 ~ 108372
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2022.108372	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 若槻 聡
2. 発表標題 Zeta functions and nonvanishing theorems for toric periods on GL_2
3. 学会等名 第7回京都保型形式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 若槻 聡
2. 発表標題 新谷の二重ゼータ関数
3. 学会等名 数論合同セミナー 京都大学数学教室 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 若槻 聡
2. 発表標題 コンパクトな算術商上のヘッケ固有値の漸近分布
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「表現論と代数、幾何、解析をめぐる諸問題」 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若槻 聡
2. 発表標題 Asymptotic distribution of Hecke eigenvalues on compact arithmetic quotients
3. 学会等名 Pan Asia Number Theory Conference 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若槻 聡
2. 発表標題 Dimension formula and Shintani zeta functions (I), (II)
3. 学会等名 第21回白馬整数論オータムワークショップ「Hilbert-Siegel 保型形式とその周辺」 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若槻 聡
2. 発表標題 新谷の二重ゼータ関数
3. 学会等名 代数学セミナー, 東北大学(招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者のホームページ http://wakatsuki.w3.kanazawa-u.ac.jp/index.html</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	都築 正男 (Tsuzuki Masao) (80296946)	上智大学・理工学部・教授 (32621)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

<p>国際研究集会 RIMS 共同研究(公開型)「保型形式, 保型表現とその周辺」</p>	<p>開催年 2019年~2019年</p>
---	----------------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------

ドイツ	Bielefeld University	Leipzig University	Marburg University	
カナダ	University of Toronto			