様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：１３５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｋ０３２３６

研究課題名（和文）特殊関数と代数幾何

研究課題名（英文）Special functions and algebraic geometry

研究代表者
小池　健二（KOIKE, Kenji）

山梨大学・大学院総合研究部・准教授

研究者番号：２０３６２０５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,000,000円

研究成果の概要（和文）：F. BeukersとG. Heckmanの結果を用いて，Lauricellaの超幾何関数F_Cに対しモノドロミー群のZariski閉包を調べた。モノドロミー群の解空間への作用が既約であるとき，そのZariski閉包は，古典群GL_n, O_n, Sp_nのいずれかに分類される。また，特殊なパラメータに対するF_Cの積分表示から得られるＫ３曲面と３次元Calabi-Yau多様体についても考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
多変数超幾何関数のモノドロミー群に関しては多くの研究があるが，そのZariski閉包やArithmeticyについては十分な研究はなされていない。本研究でLauricellaの超幾何関数F_Cに対して行われたモノドロミー群のZariski閉包の分類は，多変数超幾何関数の変数の個数に制限を与えずに得られた最初の結果であると言える。この結果は，F_Cのモノドロミー群のarithmeticyに関する研究への第１歩となだろう。

研究成果の概要（英文）：We studied the Zariski closure of the monodromy group for Lauricella's hypergeometric function F_C applying results of F. Beukers and G. Heckman. If the monodoromy group acts irreducibly on the solution space, the Zariski closure is one of classical groups GL_n, O_n and Sp_n.
We also considered K3 surfaces and Calabi-Yau varieties arising from integral representations of F_C

研究分野：代数幾何

キーワード：超幾何関数　代数多様体

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

（１）F. Beukers と G. Heckman は 1989 年の論文で，一般超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ のモノドロミー群を微分ガロア理論の観点から調べた。彼らは Picard-Vessiot 群と呼ばれる微分ガロア群（Fuchs 型微分方程式に対しては，モノドロミー群の Zariski 閉包で与えられる）を決定し，モノドロミー群が有限群となるパラメータのリストも与えた。Gauss の超幾何関数には，一般超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ 以外にも，多くの一般化・多変数化が知られている。典型的な多変数超幾何関数の例として，Appell 及び Lauricella によって１９世紀末に導入された超幾何関数 F_A，F_B，F_C，F_D が挙げられる。これ等の関数が満たす微分方程式に対して，多くの研究者によりモノドロミー群の具体的な計算等が行われているが，Picard-Vessiot 群の決定に関する研究は十分になされていない。現時点で知られている結果としては，佐々木武氏による Appell の超幾何関数 F_1, F_2, F_3 と Lauricella の F_D に対するパラメータが一般の場合，P. Deligne と G. Mostow による，複素超球への多価写像を引き起こす Lauricella の F_D に関する研究だけである。

（２）多くの超幾何関数は，積分表示を通して代数幾何学とも密接に関係している。Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1(1/2, 1/2, 1, x)$の積分表示は楕円積分であり，そのモノドロミー群は level 2 の合同部分群 Γ(2)と射影同値である。上で述べた Deligne-Mostow の例をはじめ種々の Euler 型積分表示を持つ超幾何関数に対し，楕円曲線と保型関数の理論を高次元化する形で，対応する代数多様体の周期写像と逆写像としての保型関数の研究が行われてきた。また，超幾何関数のモノドロミー群に関しては，arithmeticy の問題も研究されてきたが，系統的な結果として知られているものは，竹内喜佐雄氏による arithmetic triangle group の研究と Deligne-Mostow による F_D に関するものだけである。

２．研究の目的

（１）多変数超幾何関数に対し，モノドロミー群の Zariski 閉包を決定する。
（２）超幾何関数の積分表示から得られる代数多様体の族を周期積分の観点から調べる。

３．研究の方法

（１）近年，後藤良彰氏と松本圭司氏によって Lauricella の超幾何関数 F_C のモノドロミー群の構造が調べられ，既約性などの条件件が分かった。後藤-松本の結果に Beukers と Heckman の論法を応用することにより，超幾何関数 F_C のモノドロミー群に対する Zariski 閉包を調べた。
（２）超幾何関数 F_C の積分表示が，射影空間の２重被覆の周期積分となっているようなパラメータに対し，特異点解消により得られる Calabi-Yau 多様体の性質とモノドロミー群について調べた。S. Cynk，D. van Straten，T. Szemberg による double octic Calabi-Yau の特異点解消を応用して Euler 数，Hodge 数の計算を行った。

以上の研究は，後藤良彰氏（小樽商科大学）との共同研究によって行われた。

４．研究成果

（１）Lauricella の超幾何関数 F_C

$$F_C(a,b,c;x) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n}(b)_{m_1+\cdots+m_n}}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_n)_{m_n} m_1!\cdots m_n!} x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$$

に対しモノドロミー群の Zariski 閉包を調べた。F_C が満たす微分方程式の解空間は2^n次元であり，後藤-松本により与えられた基底に関するモノドロミー群の行列表現を用いて具体的な計算を行った。モノドロミー群 $\mathrm{Mon}\subset GL(2^n,\mathbb{C})$は$n+1$個の行列，$M_0, M_1, \ldots, M_n$ によって生成され M_0 は Beukers-Heckman の意味で reflection であり，$M_1, \ldots, M_n$ は Abel 群を成す。M_0 を含む Mon の最小の正規部分群を Ref とし，以下では部分群 $G\subset GL(2^n,\mathbb{C})$に対し，単位元を含む（Zariski 位相による）連結成分を G^0 で表す。また，$\delta_0 = \det M_0$ とおく。このとき以下の命題①～④を証明した。

① Mon^0 の$\mathbb{C}^{2^n}$への作用は既約であるとする。このとき次の(I)～(III)が成り立つ。
（I）$\delta_0 \neq \pm 1$ であれば $SL(2^n,\mathbb{C})\subset\overline{\mathrm{Mon}}$
（II）$\delta_0 = +1$ であれば $SL(2^n,\mathbb{C})\subset\overline{\mathrm{Mon}}$　または　$Sp(2^n,\mathbb{C})\subset\overline{\mathrm{Mon}}\subset GSp(2^n,\mathbb{C})$
（III）$\delta_0 = -1$ であれば $SL(2^n,\mathbb{C})\subset\overline{\mathrm{Mon}}$　または　$SO(2^n,\mathbb{C})\subset\overline{\mathrm{Mon}}\subset GO(2^n,\mathbb{C})$

更に $a, b, c_i \in \mathbb{Q}$ であれば $\overline{\mathbf{Mon^0}} \subset SL(2^n, \mathbb{C})$ が成り立つ。

② reflection subgroup Ref の$\mathbb{C}^{2^n}$への作用は既約であると仮定する。このとき連結成分 Ref^0 の作用が可約であれば，Ref は有限群である。

③ reflection subgroup Ref の$\mathbb{C}^{2^n}$への作用は既約であると仮定する。このとき，Mon が無限群であれば連結成分 Mon^0 の作用は既約である。

④ モノドロミー群 Mon が有限群である必要十分条件は， Ref が有限群となることである。

⑤ モノドロミー群 Mon は既約に作用するとする。reflection subgroup Ref の$\mathbb{C}^{2^n}$への作用が既約である必要十分条件は $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \alpha\beta^{-1}$ の中の高々一つが -1 であることである。ここで

$$\gamma_i = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}c_i\right), \qquad \beta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}b\right), \qquad \alpha = \exp(2\pi\sqrt{-1}a)$$

である。

（2）Lauricella の超幾何関数 F_C は Euler 型積分表示

$$F_C(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(1-a)}{\prod_k \Gamma(1-c_k)\cdot\Gamma(\sum_k c_k - a - n + 1)} \cdot \int_\Delta \prod_k t_k^{-c_k}\cdot(1-\sum_k t_k)^{\sum_k c_k - a - n}\cdot\left(1-\sum_k \frac{x_k}{t_k}\right)^{-b} dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n$$

を持つ。このことから，パラメータ $a = b = 1/2$, $c_k = 1$ に対し，超幾何関数 $F_C(a, b, c ; x)$ は射影空間 $\mathbb{P}^n$ の$2n+2$次の因子で分岐する 2 重被覆$V(x)$に対する周期積分と見なせる。代数多様体$V(x)$の性質とモノドロミー群について考察を行い以下の結果を得た。

① $n = 2$の場合，$V(x)$は代数曲面

$$V(x_1, x_2) \quad : \quad s^2 = t_1t_2(1-t_1-t_2)(t_1t_2 - x_1t_2 - x_2t_1)$$

の周期積分である。楕円曲面の構造を利用して，この曲面が楕円曲線の直積から得られる Kummer 曲面であることを示した。Appell の超幾何関数 F_4 に関する関数等式

$$F_4(a, c+c'-a-1, c, c'; x(1-y), y(1-x)) = {}_2F_1(a, c+c'-a-1, c; x)\,{}_2F_1(a, c+c'-a-1, c'; y),$$

が古典的に知られているが，その証明は超越的なものであり幾何学的なものではない。両辺の積分表示が一致することを変数変換により証明できるかという問題は，Kontsevich-Zagier によって予想された周期の問題の特殊な場合である。いずれにしても，モノドロミー群はレベル２の合同部分群 $\Gamma(2)$の直積と射影同値であることを証明した。

② $n = 3$の場合，$V(x)$は以下の 8 次の因子で分岐する$\mathbb{P}^3$の 2 重被覆である。

$$V(x_1, x_2, x_3) \quad : \quad s^2 = t_1t_2t_3(1-t_1-t_2-t_3)(t_1t_2t_3 - x_1t_2t_3 - x_2t_1t_3 - x_3t_1t_2)$$

この 3 次元多様体を Cynk と Szemberg による admissible blow-up によって Calabi-Yau 多様体に特異点解消した。具体的には，$V(x_1, x_2, x_3)$は以下の特異点を有する。

5-fold points	$P_i = H_j \cap H_k \cap H_l \cap S, \quad (\{i,j,k,l\} = \{0,1,2,3\})$
4-fold points	$H_i \cap H_j \cap H_4 \cap S, \quad (i,j = 0,1,2,3)$
triple lines	$L_{ij} = H_i \cap H_j \cap S \quad (i,j = 0,1,2,3)$
double curve	$S \cap H_4$ (smooth cubic curve), $\quad L_{i4} = H_i \cap H_4 \quad (i = 0,1,2,3)$

ここで，H_i 及び S は分岐因子

$$H_i : T_i = 0 \quad (i = 0,1,2,3), \qquad H_4 : (T_0 - T_1 - T_2 - T_3) = 0,$$
$$S : T_1T_2T_3 - T_0(x_1T_2T_3 + x_2T_1T_3 + x_3T_1T_2) = 0.$$

である。これ等の特異点を解消することにより得られる Calabi-Yau モデルの Hodge 数は

$$h^{1,1} = 68, \qquad h^{2,1} = 4$$

であり，Euler 数は 128 である。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Yoshiaki Goto and Kenji Koike	4．巻 102
2．論文標題 Picard-Vessiot groups of Lauricella's hypergeometric system E_C and Calabi-Yau varieties arising integral representations	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of London mathematical society	6．最初と最後の頁 22-42
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/jlms.12311	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 小池健二
2．発表標題 8次のKummer曲面と32本の直線
3．学会等名 2019年度第5回早稲田大学整数論セミナー
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関