様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月　８日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ０３２３７
研究課題名（和文）ゼータ関数及び数論的誤差項の平均値定理の研究

研究課題名（英文）Research on the mean values of zeta-functions and arithmetical error terms

研究代表者
谷川　好男（Tanigawa, Yoshio）

名古屋大学・多元数理科学研究科・招へい教員

研究者番号：５０１０９２６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：ホールはリーマンゼータ関数の零点の研究の中で,ハーディ関数の導関数の2乗平均の誤差項の改良を問題とした．我々はハーディ関数の導関数の精密な近似式を求め，彼の問題を肯定的に解決した．またハーディ関数とリーマンゼータ関数，かつ保型ハーディ関数とリーマンゼータ関数の混合型平均値について幾つかの場合に漸近式を導いた．二重ゼータ関数では，いわゆる臨界領域において，二つの変数の虚部に関する詳細なオーダーを求め，それを２乗平均に応用し，知られていた結果を改良した．さらにディリクレの約数関数とピルツの３次約数関数の総和に対する誤差項について，それらの数種類の混合型平均値を研究した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
ホールの問題を解決するにあたっては，リーマン-ジーゲル公式を応用してハーディ関数の導関数の精密な近似式を導き，それによって２乗平均を改良することができた.これらは今後のハーディ関数の研究に寄与できたと思う．多重ゼータ関数は日本を中心に精力的に研究されている．二重ゼータ関数の上からの詳細な評価や２乗平均の改良は学術的に大きな意義がある．数論的誤差項の混合型平均値では,全く異なっていると思われるものの積の平均が漸近式を持つなど，今後の研究を示唆しているように思われる．

研究成果の概要（英文）：In his research of consecutive zeros of the Riemann zeta-function, Hall investigated the mean square of k-th derivative of Hardy's function and proposed to improve his error term. By using the Riemann-Siegel formula, we showed the accurate approximation of the derivative of Harsy's function and succeeded to improve Hall's result. We also derived the asymptotic formulas of several hybrid mean values of Hardy's function and the Riemann zeta-function. On the double zeta-function, we showed the detailed order of double zeta-funtion and improved the preceding results of its mean square estimate. We also studied the hybrid mean values of different kind of arithmetical functions related to the Dirichlet and Piltz divisor problems.

研究分野：解析的整数論

キーワード：ゼータ関数　ハーディ関数　二重ゼータ関数　数論的誤差項　２乗平均　混合型平均値

１．研究開始当初の背景

解析的整数論では研究対象の平均的な挙動を考察することによって，有用な数論的結果が得られることが多い．本研究では，ハーディ関数，二重ゼータ関数，約数関数の総和の誤差項についてそれらの平均を主な研究対象とした．当初それらの背景は以下の様であった．

(1)ハーディ関数 $Z(t)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の関数等式を変形して $\zeta(1/2+it)$ が実数値をとるようにしたもので，$\zeta(s)$ の臨界線上の零点を調べるためにハーディが導入した．ハーディ・リトルウッドは $0\leqq t\leqq T$ における $Z(t)$ の平均は $O(T^{7/8})$，$|Z(t)|$ の平均は T 以上であることを示し，臨界線上の零点の個数の研究に応用した．1999 年にホールは $\zeta(s)$の臨界線上の隣接零点の研究において，$Z(t)$に関する様々な平均値を調べた[H]．特に $Z(t)$の k 階導関数 $Z^{(k)}(t)$ の２乗平均では誤差項が $O(T^{3/4}(\log T)^{2k+1/2})$であることを示しているが，更に T のべき指数を 1/2 に改良することを問題として提起した.一方 2004 年にイヴィッチは $Z(t)$の平均は $O(T^{1/4+\varepsilon})$ であることを示した．上記の $O(T^{7/8})$に比べて大きな改良で，$Z(t)$の符号変化が非常に激しいことを示している．これを契機としてイヴィッチ，ユティラ等によって研究が進展し，ハーディ関数の理論は大きく発展した．

(2) 多重ゼータ値や複素変数関数としての多重ゼータ関数は，近年日本において多くの研究者によって精力的に研究されている対象である．二重ゼータ関数の上からの評価はすでに木内・谷川の結果があったが, 2015 年ごろより二重ゼータ関数 $\zeta_2(s_1,s_2)$の $\mathrm{Im}(s_1)$や $\mathrm{Im}(s_2)$に関する２乗平均値が研究されるようになった.

(3) 研究当初のころイヴィッチとジャイは，ゼータ関数と数論的誤差項，あるいは２つの異なる数論的誤差項の積の平均値の研究を始めていた. 一見奇妙ではあるが, この研究は,異なる対象の符号変化による打ち消しあいを観察するという意味で面白いと思われた．彼らが扱っている以外の混合型平均値で，如何なることがわかるかというのは興味深い問題であった．

２．研究の目的

(1) ハーディ関数に関する第１の目的は，$Z^{(k)}(t)$ の２乗平均の誤差項における T のべきを 1/2 に改良してホールの問題を解決することであった．次にハーディ関数に関連した混合型の関数の平均値定理を導くこと, またイヴィッチが著書[I]において大きな問題として挙げている $Z(t)^3$ の非自明な平均値を導くことであった．さらにこれらに取り組んでいるうちに派生した問題として,ハーディ関数のグラム点における値の平均挙動も研究の課題となった．

(2) すでに知られていた二重ゼータ関数の増大度を詳細に決定すること．　また二重ゼータ関数 $\zeta_2(s_1,s_2)$の平均値として，$\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)$が比較的小さい場合の，木内・南出の結果 [KM] を改良することが当初の目的であった．

(3) 正の整数 n を k 個の正の整数の積として表す方法の個数を $d_k(n)$，また $d_k(n)$の $1\leqq n\leqq x$ における和の誤差項を $\Delta_k(x)$ とする．本研究では，$\Delta_2(x)$ と $\Delta_3(x)$ に関して，イヴィッチ，ジャイが扱っていない混合型の平均値を研究することが当初の目的であった．　更に別の方向として $\Delta_2(x)$と $\Delta_2(x^\alpha)$の混合型の平均値も研究課題とした．

３．研究の方法

(1) ホールが $Z^{(k)}(t)$の 2 乗平均を求めるのに用いたものは $Z^{(k)}(t)$の近似関数等式である．ただ彼が得た誤差項は $O(t^{-1/4}\log^k t)$ の形をしており，上述のホールの問題を解決するには大きすぎる.そこで本橋の講義録 [M] を参考にし，$\zeta(s)$ の k 階導関数のリーマン-ジーゲル公式を準備し，それから $Z(t)$の k 階導関数の精密な近似式を導く．そしてこの近似式を使って $Z^{(k)}(t)$の２乗平均を求める．ハーディ関数に関連した混合型平均値ではやはり $Z(t)$の近似式が必要であるが，この場合は，イヴィッチ の著書 [I] にしたがって，smooth weight を持つ近似関数等式に指数和の変換公式を適用する．

(2) 2011 年の木内,谷川,ジャイ[KTZ]では二重ゼータ関数の近似として，約数のべき和の有限和による表示が証明されている．以前はこの項を自明に評価していたため最終結果が精密とはいいがたかった．それを解決すためにこの和の部分をペロンの公式を用いてリーマンゼータ関数を含む積分で表示し，それを用いて二重ゼータ関数の上からの評価を導く．またその表示を 2 乗平均の評価に応用する．

(3) 約数関数 $d_2(n)$と $d_3(n)$の総和に対する誤差項 $\Delta_2(x)$と $\Delta_3(x)$ について，$\Delta_3(x)^2\Delta_2(x)$，$\Delta_3(x)^2\Delta_2(x)^2$, $\Delta_3(x)^2\Delta_2(x)^3$ の３種の混合型平均値を考察する．$\Delta_2(x)$に対しては著名なヴォ

ロノイ公式を，$\Delta_3(x)$に関しては我々がすでに得ていたトング型の公式を用いてそれぞれの級数を展開し，その積分を指数和として評価する．

４．研究成果

(1) 本橋講義録[M] を参考にして $\zeta^{(k)}(1/2+it)$のリーマン・ジーゲル公式を導き,それを使って $Z^{(k)}(t)$ の近似式を誤差項が $O(t^{-3/4}\log^{k-1}t)$ の形で求めることができた．この近似式から$Z^{(k)}(t)$の２乗平均の誤差項を $O(T^{1/2}\log^{2k+1}T)$ にまで改良し，ホールの問題を肯定的に解くことができた．$Z^{(k)}(t)$の近似式の改良は，今後のハーディ関数の零点分布の研究に役立つことと思う．この結果は南出真氏との共同研究で `Mean square of the derivative of Hardy's Z-function' として出版された．

ハーディ関数の混合型平均値については $Z(t)\zeta(1/2+it)$，$Z(t)^2\zeta(1/2+it)$ を考察した．この問題ではリーマンゼータ関数及びその冪の smooth weight 付きの近似関数等式に指数和変換公式を適用した．これらの平均として前者では $c_1T^{3/4}P_1(\log T)+O(T^{1/2}\log T)$を，後者では $c_2 T P_2(\log T)+O(T^{3/4}\log^2 T)$なる漸近式を得た．ここで c_1,c_2 は定数，$P_j(u)$は j 次の多項式である．ハーディ関数とリーマンゼータ関数の混合型平均に，漸近式が成り立つこと自体が不思議な気がした.イヴィッチの問題である $Z(t)$の３乗平均も試みたが，残念ながら非自明な結果は得られなかった．この結果は海外研究協力者との共同研究で `Some mean value results related to Hardy's function'として発表した．

上の研究からハーディ関数のグラム点における値の研究が派生した.グラム点というのは $\zeta(1/2+it)$ が実数となる t のことで，$\zeta(s)$ の臨界線上の零点と交互に生ずる傾向がある．ティッチュマルシュは N 番目までのグラム点における $Z(t)$ の値の和について研究し，誤差項が $N^{3/4}\log^{3/4}N$ であることを示したが，我々はそれを $N^{1/4}\log^{3/4}N\log(\log N)$ に改良できた．グラム点における値はイヴィッチ [I] でも取り上げられており,$\zeta(s)$ が比較的大きい値をとる傾向があるため興味深い結果だと思われる．これは海外研究協力者との共同研究で `Average of Hardy's function at Gram points' として発表した．

ハーディ関数の類似として保型形式に付随するハーディ関数がある．$f(z)$を $SL(2,Z)$に関する重さ k のカスプ形式とするとき，その L 関数 $L_f(s)$ は関数等式を満たすから，$\zeta(s)$ のときと同様に実数化して保形ハーディ関数 $Z_f(t)$ が定義される．上記の混合型の平均値の類似として $Z_f(t)$と$\zeta(1/2+it)$の積の平均が $e^{\pi ik/4}L_f(1)T+O(T^{3/4+\varepsilon})$ なる漸近式を持つことを示すことができた．$Z_f(t)Z(t)$の平均も考察したが $O(T^{1+\varepsilon})$しか得られなかった．保型ハーディ関数はまだあまり研究が進んでいないので今後の発展が望まれる．これは国内の研究協力者との共同研究である．

(2) [KTZ]の公式にペロンの公式を適用し，$\zeta_2(s_1,s_2)$ をリーマンゼータ関数を含んだ積分として表した．その表示を用いて $0<\mathrm{Re}(s_1),\mathrm{Re}(s_2)<1$ のとき，$\mathrm{Im}(s_1)$，$\mathrm{Im}(s_2)$ の大きさに応じて細かく場合分けをし，$\zeta_2(s_1,s_2)$ の上からの評価を精密な形で求めた．更に $\zeta_2(s_1,s_2)$ の 2 乗平均に応用し，木内・南出 [KM] の結果を改良することができた．これは南出真氏と海外研究協力者との共同研究で，`Bounds of double zeta functions and their applications' と `Mean square of double zeta-function'の２編にまとめ発表した．

(3) $\Delta_2(x)$と$\Delta_3(x)$では，上記のように３種類の混合型平均値を研究した．$\Delta_3(x)^2\Delta_2(x)$ の平均は漸近式を持たず上からの評価として $O(T^{67/36+\varepsilon})$を示した．一方$\Delta_3(x)^2\Delta_2(x)^2$ と$\Delta_3(x)^2\Delta_2(x)^3$ の平均は漸近式を持ち，その主要項はそれぞれ $c_2T^{13/6}$, $c_3T^{29/12}$であった．(c_2,c_3は定数である.) ２乗より少し大きい混合型平均値の誤差項が漸近式を持つことは興味深い． ヴォロノイ公式やトング型の公式を用いたが，途中でロバート・サルゴスの３次元指数和の評価式も使った．これは海外研究協力者との共同研究で `On hybrid moment of $\Delta_2(x)$ and $\Delta_3(x)$' として発表した．

更に $\Delta_2(x)$ と $\Delta_2(x^\alpha)$ の数種の混合型平均値を考察した．ここで αは 1 より大きい実数である．$\Delta_2(x)\Delta_2(x^\alpha)$ や $\Delta_2(x)^2\Delta_2(x^\alpha)$ の平均は漸近式を持たず，上からのバウンドを求めた．一方 $(\Delta_2(x)\Delta_2(x^\alpha))^2$ の平均は漸近式を持ち，その主要項は $c(\alpha)T^{3/2+\alpha/2}$の形をしていることを示した．

[H] R.R.Hall, The behaviour of the Riemann zeta-function on the critical line, Mathematika, 46 (1999) 281-313.
[I] A.Ivic, The theory of Hardy's Z-function, Cambridge Univ. Press (2013).
[KM] I.Kiuchi, M.Minamide, Mean square formula for the double zeta-function, Funct. Approx. 55 (2016) 31-43.
[KTZ] I. Kiuchi, Y.Tanigawa, W.Zhai, Analytic properties of the double zeta-function, Indag. Math. 21 (2011), 16-29.
[M] Y.Motohashi, Lectures on the Riemann-Siegel formula, Colorado University 1987.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　5件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Xiaodong Cao, Yoshio Tanigawa, Wenguang Zhai	4．巻 199
2．論文標題 Average of Hardy's function at Gram points	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Acta Arithmetica	6．最初と最後の頁 237-251
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/aa191103-13-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Debika Banerjee, T. Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 44
2．論文標題 Mean square of double zeta function	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6．最初と最後の頁 83-101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179322	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Xiaodong Cao, Yoshio Tanigawa, Wenguang Zhai	4．巻 58
2．論文標題 On hybrid moments of Δ_2(x) and Δ_3(x)	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Ramanujan Journal	6．最初と最後の頁 597-631
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11139-021-00431-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 T. Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 485
2．論文標題 Mean square of the derivative of Hardy's function	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Application	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2019.123772	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Xiaodong Cao, Yoshio Tanigawa, Wenguang Zhai	4．巻 7
2．論文標題 Some mean value results related to Hardy's function	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Research in Number Theory	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40993-021-00255-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Jun Furuya, T. Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 71
2．論文標題 Titchmarsh's method for the approximate functional equations for ζ'(s)^2, ζ(s)ζ''(s) and ζ'(s)ζ''(s)	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Canadian J. Math.	6．最初と最後の頁 1465-1493
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/CJM-2018-004-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Debika Banerjee, T. Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 304
2．論文標題 Bounds of double zeta-function and their applications	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Pacific J. Math.	6．最初と最後の頁 15-41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2020.304.15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 南出真，矢代好克，谷川好男
2．発表標題 合同約数和の平均に対する誤差項の平均について
3．学会等名 日本数学会秋季総合分科会（千葉大学）
4．発表年 2021年

１．発表者名
Debika Banerjee，藤澤雄介，南出真，谷川好男

２．発表標題
On partial sum of Apostol's Mobius function

３．学会等名
日本数学会秋季総合分科会 （熊本大学）

４．発表年
2020年

１．発表者名
南出真，谷川好男

２．発表標題
ハーディー関数の導関数の２乗平均について

３．学会等名
日本数学会秋季総合分科会（金沢大学）

４．発表年
2019年

１．発表者名
出崎千晶，南出真，谷川好男，矢代好克

２．発表標題
法 m の約数問題と整数の表現への応用

３．学会等名
日本数学会中国・四国支部例会(岡山理科大学,加計研修センター)

４．発表年
2020年

１．発表者名
Debika Banerjee，南出真，谷川好男

２．発表標題
Mean square of double zeta-function

３．学会等名
日本数学会秋季総合分科会 （岡山大学）

４．発表年
2018年

1．発表者名 Debika Banerjee，井川祥彰，南出真，谷川好男
2．発表標題 モジュラー群の合同部分群の指数の平均について
3．学会等名 日本数学会秋季総合分科会（北海道大学）
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	南出　真 (Minamide Makoto)		
研究協力者	ジャイ　ウェングアン (Zhai Wenguang)		
研究協力者	ツァオ　シャオトン (Cao Xiaodong)		

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	中国鉱業大学	北京石油化工学院		
インド	IIIT(Delhi)			