

令和 5 年 6 月 14 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03241

研究課題名(和文) ヒルベルト函数の理論を積極的に用いた局所環論の展開

研究課題名(英文) Development of local ring theory actively using the theory of Hilbert functions

研究代表者

大関 一秀 (Ozeki, Kazuho)

山口大学・大学院創成科学研究科 准教授

研究者番号：70445849

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は代数学の一分野である可換環論の発展を目標としている。特に、ヒルベルト函数の理論を積極的に用いる点が特徴である。

本研究では、主に第1および第2ヒルベルト係数による随伴次数環、Rees代数の構造の解明に着手した。具体的には、解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内における $m$ -準素イデアルの第1および第2正規ヒルベルト係数による随伴次数環の新たな深さの評価を与えた。これらの研究成果は、海外の共同研究者3名との国際共同研究として実施し、2編の査読付き国際共著論文として発表済みである。また、上述の成果発表を含めた12件の学会発表を実施し、その内の7件は国際学会において成果報告であった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究代表者がこれまでに培ってきたSally加群の理論を発展させ、それらを活用することで、これまで解明が困難とされてきたイデアルの正規フィルトレーションの構造の制御が可能となり、第1および第2正規ヒルベルト函数に関する新たな理論を与えることが可能となった。さらに、本研究で築き上げた技術と知見は、今後の局所環のヒルベルト函数の挙動研究における活用も期待出来る。また、本研究が3カ国の共同研究者との国際共同研究として発展し、一定の成果を残せたことも本研究実施の意義の一つであると考えられる。

研究成果の概要(英文)：The goal of this research project is to develop commutative algebra, a branch of algebra. In particular, I have made new developments in local ring theory by actively using the theory of Hilbert functions of local rings.

In this research, I mainly started to clarify the structure of the associated graded rings and Rees algebras by the first and second Hilbert coefficients. Specifically, I give a new class of structures of associated graded rings by the first and second normal Hilbert coefficients of  $m$ -primary ideals in analytically unramified Cohen-Macaulay local rings. These research results were carried out as international joint research with three researchers, and have already been published as two peer-reviewed international papers.

研究分野：代数学

キーワード：可換環論 局所環 ヒルベルト函数 ヒルベルト係数 Rees代数 随伴次数環 Sally加群

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

可換環論におけるヒルベルト函数の挙動研究は、1960年頃より永田や Samuel による重複度研究を端に急速に発展した。その後、Northcott, Huneke, Abhyankar, Sally により、Rees 代数や随伴次数環といったブローアップ代数の環構造との関わりの中で深い研究が進められた。現在でも、欧州の M. E. Rossi や J. Elias、米国の C. Polini を中心に膨大な数の関連論文が発表されている。

このような歴史的背景に対し、本研究は、主に2つの研究課題「巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動研究」、「第1および第2ヒルベルト係数による随伴次数環、Rees 代数の構造研究」を掲げて開始された。特に、発展性の兆しが見えていたことから、後者の研究課題についての解明への着手を積極的に行った。

研究代表者は先行研究にて、M. E. Rossi 氏と共同で、コーエン・マコーレイ局所環  $(A, m)$  内における整閉  $m$ -準素イデアルの第1ヒルベルト係数による随伴次数環の構造の決定を行った ([OR])。その中で、イデアルの整閉性を用いた Sally 加群の理論の構築を行っていた。Sally 加群とは、与えられた  $m$ -準素イデアルとその節減によって定められる次数付き加群のことであり、W. V. Vasconcelos ([V]) によって提唱されたものである。Sally 加群は、「そのヒルベルト函数が  $m$ -準素イデアルのヒルベルト函数の補正項となっている。」、「特に、第1および第2ヒルベルト係数の理論との相性良い。」、「随伴次数環の深さ評価が可能である。」といったヒルベルト函数の理論を構築する上で重要な情報を含むことからその構造の解明が鍵になると考えられていた。その一方で、ほぼ同時期に Corso-Polini-Rossi によって解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内の  $m$ -準素イデアルの第1正規ヒルベルト係数の挙動に関する学術論文 [CPR] が発表された。この [CPR] は、第1正規ヒルベルト係数を制御する際の Sally 加群の理論の有効性について示唆する内容であった。

以上の様な研究動向に対して、研究代表者は Rossi 氏と共に、 $m$ -準素イデアルの正規フィルトレーションに関する Sally 加群への理論の拡張の可能性について予備研究を実施し、第1正規ヒルベルト係数に対しては一定の成果が得られることがある程度判明していた。本研究開始当初は、これらの予備研究における考察を纏めるとともに、第2正規ヒルベルト係数による随伴次数環の構造の制御の可能性についても議論を開始した。

### 2. 研究の目的

本研究は、代数学の一分野である可換環論の発展を目的とするものである。与えられたネーター局所環の構造を解明する際に、そこに含まれる  $m$ -準素イデアルの構造が指標になると考えられている。そして、その  $m$ -準素イデアルの構造を分類する際の有効な手段の一つとされているのがヒルベルト函数の理論である。本研究では、自ら構築したヒルベルト函数の理論を駆使して、イデアルおよびそれらを含むネーター局所環の代数的な構造の分類を行うことが目標である。

本研究では、上述の背景を念頭に、解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内の  $m$ -準素イデアルに対して、その正規ヒルベルト函数によって、正規フィルトレーションによる随伴次数環の構造を決定することを目標とする。

### 3. 研究の方法

先行研究において実施していた、整閉イデアルの Sally 加群の構造論を参考に、「解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内における  $m$ -準素イデアルの正規フィルトレーションに関する Sally 加群の構造は如何なるものか?」という具体的問いの下で理論の構築を行った。正規フィルトレーションは、通常のイデアル冪のフィルトレーションと比較すると、かなり特殊なものであると考えられていることから、その特殊性を用いた理論の構築が期待出来る。

本研究を実施する際に、現代の可換環論におけるヒルベルト函数の挙動研究の権威の一人である M. E. Rossi 氏との研究打合せが有効であると考えられることから、2018年と2019年にそれぞれ数週間、本研究によるジェノバ大学数学科への研究出張を実施した。これらの研究打合せは、当時、同機関に滞在していた、S. K. Masuti 氏も含めた国際共同研究に発展した。また、H. L. Truong 氏 (ザールランド大学・ドイツ) とともに本研究に関する研究打合せを実施した。

2020年度以降は、新型コロナウイルス感染症拡大の影響から、参加を予定していた殆ど全ての

学会・研究集会が中止もしくは延期となり，対面での研究打合せも断念せざるを得ない状況が続いた。このような状況から，本研究の後半では，上述の国際共同研究を継続しつつも，研究代表者の単独研究に重きを置いた活動へと移行する運びとなった。その中で，stretched な  $m$ -準素イデアルの第 1 ヒルベルト係数に着目し，本研究の前半にて構築した Sally 加群の理論を応用することで理論の構築を試みた。

#### 4 . 研究成果

本研究の前半では，主に，正規ヒルベルト函数の挙動研究に従事し，一定の成果を挙げた。解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環  $(A, \mathfrak{m})$  内の  $m$ -準素イデアルの正規フィルトレーションに関する Sally 加群の理論を構築した。そして，それらの代数的構造の特殊性を活用することで，第 1 および第 2 正規ヒルベルト係数による随伴次数環の構造の分類をそれぞれ与えることが出来た。具体的には，1990 年代に，伊藤 ([I]) によって与えられた第 1 および第 2 正規ヒルベルト係数のそれぞれの下限值に対して almost minimal となるような  $m$ -準素イデアルの正規フィルトレーションに関する Sally 加群のコーエン・マコーレイ性を与えることで，それらに対応する随伴次数環の深さの評価を与えた。

第 1 正規ヒルベルト係数に関する成果は，S. K. Masuti 氏と M. E. Rossi 氏との国際共著論文として Journal of Algebra に掲載され，第 2 正規ヒルベルト係数に関する成果は，上述の両氏に H. L. Truong 氏を加えた国際共著論文として Proceedings of the American Mathematical Societies に掲載された。これらの研究成果は，アメリカ数学会主宰の Special Session on Commutative Algebra, The 10th Japan-Vietnam Joint Seminar Commutative Algebra, 第 8 回日中韓環論国際シンポジウムといった国際会議において口頭発表を行った。その他，日本数学会 2020 年度年会，第 40, 41 回可換環論シンポジウム，第 32 回可換環論セミナーといった国内の学会・研究集会にて研究成果を発信した。

本研究の後半において考察した stretched イデアルの第 1 ヒルベルト係数に関する理論についても，4 件のオンラインセミナー（内 3 件は外国研究機関にて実施）にて経過報告の口頭発表を実施した。

#### 【引用文献】

- [CPR] A. Corso, C. Polini, and M. E. Rossi, Bounds on the normal Hilbert coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 144, 2016, 1919-1930.
- [I] S. Itoh, Coefficients of normal Hilbert polynomials, Journal of Algebra, 150, 1992, 101-117.
- [OR] K. Ozeki and M. E. Rossi, The structure of the Sally modules of integrally closed ideals, Nagoya Mathematical Journal, 227, 2017, 49-76.
- [V] W. V. Vasconcelos, Hilbert functions, analytic spread, and Koszul homology, Contemp. Math., 159, 410-422 (1994).

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masuti Shreedevi K., Ozeki Kazuho, Rossi Maria Evelina	4. 巻 571
2. 論文標題 A filtration of the Sally module and the first normal Hilbert coefficient	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 376 ~ 392
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.06.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Masuti Shreedevi K., Ozeki Kazuho, Rossi Maria Evelina, Truong Hoang Le	4. 巻 148
2. 論文標題 On the structure of the Sally module and the second normal Hilbert coefficient	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2757 ~ 2771
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14839	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazuho Ozeki	4. 巻 -
2. 論文標題 The structure of Sally modules and normal Hilbert coefficients	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第52回環論および表現論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 108-115
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuho Ozeki	4. 巻 -
2. 論文標題 On the structure of the Sally module and the second normal Hilbert coefficient	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第41回可換環論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 176-183
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuho Ozeki	4. 巻 -
2. 論文標題 A filtration of the Sally module and the first normal Hilbert coefficient	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第40回可換環論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 174-181
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 The reduction number of stretched ideals
3. 学会等名 Virtual Commutative Algebra Seminars, IIT Bombay (India) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 A study of the structure of Sally modules-Research talk
3. 学会等名 WVU Algebra Seminar via ZOOM, West Virginia University (USA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 A study of the structure of Sally modules-Introductory talk
3. 学会等名 WVU Algebra Seminar via ZOOM, West Virginia University (USA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大関 一秀
2. 発表標題 Sally modules of stretched $m$ -primary ideals
3. 学会等名 東京可換環論セミナー, 東京大学(東京)(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 S. Masuti, K. Ozeki, M. E. Rossi, and H. L. Truong
2. 発表標題 On the structure of the Sally module and the second normal Hilbert coefficient
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 On the structure of the Sally module and the second normal Hilbert coefficient
3. 学会等名 第41回可換環論シンポジウム(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 The structure of Sally modules and normal Hilbert coefficients
3. 学会等名 第8回日中韓環論国際シンポジウム(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 第2正規ヒルベルト係数について
3. 学会等名 第32回可換環論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 The structure of Sally modules and the second normal Hilbert coefficient
3. 学会等名 Special Session on Commutative Algebra and its Environs at the Spring Central and Western Joint Meeting of the AMS, Honolulu (USA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 A filtration of the Sally module and the first normal Hilbert coefficient
3. 学会等名 第40回可換環論シンポジウム, レクトーレ葉山 (神奈川)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuho Ozeki
2. 発表標題 A study of the first and second normal Hilbert coefficients
3. 学会等名 The 10th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Hue University (Vietnam) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大関 一秀
2. 発表標題 正規化されたヒルベルト函数について
3. 学会等名 第63回代数学シンポジウム, 東京工業大学(東京)(招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ロッシ マリア  (Rossi Maria)	ジェノバ大学・教授	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Genova University			
インド	Indian Institute of Technology Dharwad			
ベトナム	Institute of Mathematics, VAST	Thai Nguyen University of Education		
ドイツ	University of Saarlandes			