

令和 4 年 5 月 29 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03242

研究課題名(和文) グラフ上の調和解析を用いたグラフのゼータ関数の研究とその応用

研究課題名(英文) A study on zeta functions of graphs via harmonic analysis and its applications

研究代表者

山崎 義徳 (Yamasaki, Yoshinori)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・教授

研究者番号：00533035

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：グラフには Ihara ゼータ関数と呼ばれる関数が付随し、それを調べることでグラフの様々な性質を知ることができる。本研究では、まず応用の観点からも重要な Ramanujan グラフ(これは付随する Ihara ゼータ関数が Riemann 予想の類似を満たすことで特徴付けられる)の構成問題について取り組んだ。具体的には、四元数環とその整環を用いてグラフを構成し、特別な場合にそれが Ramanujan グラフであることを示した。また、基本群の表現付き Ihara ゼータ関数を考察し、その対数微分の原点における Taylor 係数(これは"複雑さ"などグラフの様々な特徴を反映している)を特別な場合に明示的に計算した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Ramanujan グラフは、ハッシュ関数の構成など現在暗号理論の分野においても応用が著しい。それゆえ本研究で構成した Ramanujan グラフは実社会での活用に直結する可能性が期待できる。また、本グラフはパラメータ付きで構成されているため、必要に応じて適宜パラメータを調整して利用できる点も利点の一つであると考えられる。また、Ihara ゼータ関数の対数微分の研究は、グラフ理論とゼータ関数論の境界領域に位置するあまり前例がない研究であるため、特別な場合ではあるがここで一般論を整理・展開できたことは、両者の境界領域のすそ野を広げるという意味でも非常に有意義であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：For each finite graph, we have the associated Ihara zeta function from which we can know various properties of the underlying graph. In this study, we first tried to construct new family of Ramanujan graphs which are important from the viewpoint of applications and characterized by the fact that the associated Ihara zeta function satisfies an analogue of the Riemann hypothesis. Specifically, we constructed graphs via quaternion algebras and their orders, and showed that, in some special cases, they are actually Ramanujan. Moreover, we also studied the logarithmic derivative of Ihara zeta function with a representation of the fundamental group and, in some special cases, explicitly calculated the Taylor coefficients at the origin of that, which reflect various features of the underlying graph such as "complexity".

研究分野：解析数論

キーワード：Ihara ゼータ関数 Ramanujan グラフ 四元数環

## 1. 研究開始当初の背景

ある数学的对象を研究する際、それに付随するゼータ関数やL関数を考察し、その代数的・解析的性質から当該対象の情報を引き出す、という研究手法は、素数定理の証明に代表されるように時として非常に有効である。この手法は、Selbergによって幾何学的にも有効であることが実証されている。すなわち、ある程度性質の良い多様体に対しては、付随するSelbergゼータ関数を考え、それを当該多様体上の調和解析を駆使して研究することで、素数定理の幾何類似である素測地線定理を得ることができる。

本研究の主たる研究対象はグラフである。グラフはしばしば様々な観点から多様体の離散類似とみなされる。有限グラフに対しては、Iharaゼータ関数と呼ばれるゼータ関数が定義され、上記と同様の考察によりその研究から素測地線定理のグラフ類似が導かれる。本研究の根本となる問いは、このIharaゼータ関数がグラフの数学的情報をどれ程内在しているか、ということである。例えばRamanujanグラフという応用の観点からも非常に性質の良いグラフがあるが、これは付随するIharaゼータ関数がRiemann予想の類似を満たす、という性質で特徴付けられる。また、Chinta-Jorgenson-Karlssonらは、離散トーラスと呼ばれるグラフに対して付随するIharaゼータ関数を調和解析的手法により研究し、"complexity"と呼ばれるグラフの複雑さを測る量についての漸近公式を導いた。さらにその極限を計算することで、実トーラスの"height"と呼ばれる量を取り出すことに成功した。これらの事実は、グラフの性質を調べる手段の一つとして付随するIharaゼータ関数を研究することが有効であることを示唆しており、今後具体的あるいは一般的グラフに対して、Iharaゼータ関数からグラフのどのような情報を引き出せるのか検証する必要があると考えられる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は以下の二つである。

### (1) Ramanujan グラフの研究：

上述の通り、Iharaゼータ関数の研究においてRamanujanグラフは重要な役割を果たす。また、ハッシュ関数の構成など、Ramanujanグラフは現在暗号理論の分野においても応用が著しい。そこで、Ramanujanグラフの一般論について、グラフ理論に限らない多角的な視点から研究を行う。しかし、Ramanujanグラフはその性質の良さゆえ構成が難しいことが知られているため、まずは既存のRamanujanグラフの構成法について代数的・組合せ論的視点から再考察を行い、一般化の余地について検討する。

### (2) Iharaゼータ関数の対数微分の研究：

Iharaゼータ関数の対数微分の原点におけるTaylor係数には、上記"complexity"をはじめとするグラフの様々な量が現れることが知られている。そこでこの係数について、視点や手法を変えて考察を深めることで、上記量についてのより詳細な情報が得られるか検証する。また、得られた情報のある種の極限を計算することで、そのグラフの極限として得られる多様体の幾何学的情報についても考察する。

## 3. 研究の方法

上記目的のそれぞれに対して、研究手法を説明する。

### (1) Ramanujan グラフの研究：

Ramanujanグラフの新規構成について検討するため、まずは最初のRamanujanグラフとして知られているLubotzky-Phillips-Sarnakによって得られたRamanujanグラフの構成方法について再考察を行う。このグラフはHamiltonの四元数環とその極大整環を用いて構成されているため、もっと一般の四元数環と整環を用いてグラフが構成できないか考察する。さらに、そのように構成されたグラフがRamanujanグラフであるかどうか検証する。

### (2) Iharaゼータ関数の対数微分の研究：

Iharaゼータ関数の対数微分について、ゼータ関数やL関数の研究でなされているような数論的手法と、熱核やラプラシアンなどを用いた調和解析的手法の二つの方向から研究を行う。前者は古典的だが、後者はChinta-Jorgenson-Karlssonらの研究で取り入れられた比較的新しい手法であるため、これらを組み合わせることでグラフの様々な量に関する詳細な情報が得られると期待される。また、グラフのメッシュを細かくし、それについての適切なスケール極限を計算することで、グラフの極限として得られる多様体の幾何学的情報について迫る。

## 4. 研究成果

本研究で得られた成果は以下のとおりである。

### (1) Lubotzky-Phillips-Sarnak型グラフの構成とそのRamanujan性：

Lubotzky-Phillips-Sarnakによって構成されたRamanujanグラフやChiuによるcubic Ramanujanグラフの構成法の一般化として、有理数体上の定符号四元数環とその整環を用いたグラフを代数的に構成した。特に整環としてIbukiyamaによって構成されたパラメータ

付き極大整環や、Hashimoto によって構成されたパラメータ付き Eichler 整環を採用した場合のグラフを詳細に調べ、前者の特別な場合(類数が1で単数群の構造が非常に易しい場合)にそのグラフが実際に Ramanujan グラフになることを証明した。後者の場合には Ramanujan グラフになることの証明はできていないが、この場合特有の問題点(特定のノルムを持つ元に対しては素因数分解の一意性が成り立たない場合があること)についても考察を深めることができた。以上は横浜国立大学の Hyungrok Jo 氏と日本大学の杉山真吾氏との共同研究である。

(2) 基本群の表現付き Ihara ゼータ関数の対数微分 :

一般の有限グラフに対して、基本群の表現付き Ihara ゼータ関数の対数微分の原点における Taylor 係数を、対応する表現の指標和で表す公式を導いた。より具体的には、Petridis-Risager による基本群が自由群でかつ表現が1次元の場合の結果を2次元表現、3次元表現の場合に拡張し、計算機を用いて次数が小さい場合の Taylor 係数を明示的に計算した。この研究はグラフ理論とゼータ関数論の境界領域に位置するあまり前例がない研究であるため、特別な場合ではあるがここで一般論を整理・展開できたことは、両者の境界領域のすそ野を広げるという意味でも非常に有意義であると考えられる。以上はニューヨーク市立大学シティカレッジの Gautam Chinta 氏との共同研究である。

(3) Schur 多重ゼータ値の研究 :

本研究期間中に、Euler-Zagier 型多重ゼータ値を組合せ論的視点から拡張した Schur 多重ゼータ値についても研究も行った。具体的には、ribbon 型という特別な場合の Schur 多重ゼータ値が大野関係式を満たすことを示した。証明の鍵となるのは山本積分表示と呼ばれるある種の反復積分表示であるため、ribbon 型以外のどのような型の Schur 多重ゼータ値が山本積分表示を持つか調べたが、一般には解明には至らなかった。また、双対性や和公式についても数値実験などでいくつか予想を立てることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hyungrok Jo, Shingo Sugiyama and Yoshinori Yamasaki	4. 巻 33
2. 論文標題 Ramanujan graphs for post-quantum cryptography	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography (MQC 2019), Math. Ind.	6. 最初と最後の頁 231 - 250
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-15-5191-8_17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maki Nakasuji, Ouamporn Phuksuwan and Yoshinori Yamasaki	4. 巻 333
2. 論文標題 On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 570 - 619
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2018.05.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hyungrok Jo and Yoshinori Yamasaki	4. 巻 -
2. 論文標題 LPS-type Ramanujan Graphs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 2018 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA)	6. 最初と最後の頁 399 - 403
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.23919/ISITA.2018.8664284	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 山崎義徳
2. 発表標題 Non-commutative matrix forests theorem
3. 学会等名 CREST暗号数理2019年度第2回全体会議
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山崎義徳
2. 発表標題 Some topics on Schur multiple zeta functions
3. 学会等名 第40回関西多重ゼータ研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎義徳
2. 発表標題 Schur 多重ゼータ関数について
3. 学会等名 2018年度日本数学会秋季総合分科会 (代数学・特別講演) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎義徳
2. 発表標題 Schur 多重ゼータ値に関する 1-3 公式について
3. 学会等名 2018大分鹿児島整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎義徳
2. 発表標題 Dualities and sum formulas for Schur multiple zeta values of ribbon type
3. 学会等名 Zeta Functions in OKINAWA 2018
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	ニューヨーク市立大学シティカレッジ		