様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４年　６月２０日現在

機関番号：１７３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2021
課題番号：１８K０３２４５

研究課題名（和文）組合せ構造のモジュラー表現の研究とその応用

研究課題名（英文）The modular representation theory of combinatorics structures and its applications

研究代表者
島袋　修（Osamu, Shimabukuro）

長崎大学・教育学部・准教授

研究者番号：４０４１３７３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：代数的組合せ論の中心的役割であるアソシエーションスキームやその一般化であるcoherent configurationにおいて正標数の体上で隣接代数を考えた。それらの構造を考え、標準加群の直既約直和分解を考えた。それによって、AS の構造論のみならず周辺分野も発展させることができると期待している。具体的にはP&Q多項式アソシエーションスキームの一種であるハミングスキームの正標数の体上における極大な部分加群の直既約性を証明した。また、対称2-デザインから得られるcoherent configurationの正標数の体上における隣接代数と標準加群の構造を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
P&Q多項式スキームのモジュラー隣接代数の構造と標準加群の構造を決定することが最終目標で、それによって、アソシエーションスキームの構造論のみならず周辺分野も発展させることができると信じている。しかし、アソシエーションスキームの表現論は、いままで複素数体上でのみ考えられており、正標数の体上での理論は、考えられていなかった。正標数の体上での表現（モジュラー表現）を考えることは、純粋に構造論を構築する面から意味はあるが、それ以外にも、いくつかの未解決問題に対するブレイクスルーになると考えている。

研究成果の概要（英文）：Association schemes and coherent configurations play a central role in algebraic combinatorics. We considered structures of adjacency algebras of these objects over a positive characteristic field. We want to obtain an indecomposable direct sum decomposition of their standard modules. By our results, we expect to develop the structure theory of association schemes and the surrounding fields. Specifically, we proved the indecomposability of a maximal submodule of Hamming scheme, a kind of P&Q-polynomial association scheme. We also investigate the structure of the adjacency algebra and their standard modules of coherent configurations obtained from symmetric 2-designs over a positive characteristic field.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：アソシエーションスキーム　隣接代数　モジュラー表現　組合せデザイン理論

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

アソシエーションスキームは群の概念を拡張したもので、距離正則グラフ、線形符号、ブロックデザイン、線形計画法などの多くの組合せ論の対象と強く関係する中心的な役割を持つ研究対象である。そのうち、P&Q 多項式スキームは、性質のよい可換なアソシエーションスキームで、他分野との係わり合いが特に深い構造である。それらは、デルサルトによってデザイン理論、線形計画法、符号理論に応用されてきた。最近では他の情報数理の分野にも活用されている。

研究の全体構想は、P&Q 多項式スキームのモジュラー表現論を確立することである。具体的には、P&Q 多項式スキームのモジュラー隣接代数の構造と標準加群の構造を決定することである。それによって、アソシエーションスキームの構造論のみならず周辺分野も発展させることができる。しかし、アソシエーションスキームの表現論は、いままで複素数体上でのみ考えられており、正標数の体上での理論は、考えられていなかった。正標数の体上での表現（モジュラー表現）を考えることは、純粋に構造論を構築する面から意味はあるが、それ以外にも、例えば、P&Q 多項式スキームで最も有名なもののうちの一つにジョンソンスキームとよばれるアソシエーションスキームがある。そのジョンソンスキームの部分構造であるフュージョンスキームは、小さなパラメータに対してのみ存在、非存在が知られており、それ以外のパラメータに対しては、わかっていない。これは、現在のアソシエーションスキームの構造論、及び複素数体上のアソシエーションスキームの表現論の限界を示す一例である。モジュラー表現は、そのようなアソシエーションスキームの抱えている数々の未解決問題のブレイクスルーになると考えている。

２．研究の目的

本研究の目的は、アソシエーションスキームのモジュラー隣接代数と標準加群の構造を調べ、それを組合せ構造の組合せデザイン理論に応用することにある。モジュラー表現は一般に有限群や環論の研究者を中心に進められているが、組合せ論への応用結果はほとんど無い。組合せ論の中心的分野の組合せデザイン理論に応用できると考えている。また、得られた結果からデザインの特徴づけを行うだけでなく存在定理も得られる可能性がある。アソシエーションスキームのモジュラー表現を考えるには、有限群の表現の知識だけでなく、アソシエーションスキームは、ある意味で有限群の一般化であるため、有限群の表現の一般化の一面もある。そのため、一般的な有限次元代数の知識も必要になる。それと同時に、組合せデザイン理論などの組合せ構造の知識も必要となる。モジュラー表現の代数的組合せ論への応用は、まだ十分とは言えないが、有限群のモジュラー表現が有限群論自体においても重要な役割を持つように、多くの役割を持つようになることを信じている。本研究で扱うものは、それほど大きなものではないが、発展への足がかりとなるであろう。

３．研究の方法

本研究は、モジュラー隣接代数とモジュラー標準加群について、その構造を調べ、組合せ論に応用することが目標であるが、現時点ではデータが全く足りておらず、まずはデータや具体例を蓄積することから始める。計算の対象は、組合せ構造において系列に属するものが中心となる。これらは、現状、ほとんど手付かずの状態であり、計算すべきことはたくさんある。これまでに計算に成功した例は、標準加群に付加的な構造を与えた場合が多い。標準加群が代数の構造を持ち、隣接代数が、その部分代数となっている場合である。このような扱いやすそうなものから考えていく。手法としては、組合せ構造の既知の性質から考えていく方法と計算機を利用する方法が考えられる。具体的には、組合せ構造から得られたアソシエーションスキームの有限な頂点集合は隣接代数が作用する加群として捉えることができるので、それらを元の組合せ構造との関係を考えながら明らかにする。隣接代数が有限表現型の場合は、同値類まで明らかにして、標準加群の直既約直和分解を与える。そうでない場合も、可能であれば、直既約直和分解を考える。

４．研究成果

組合せデザイン理論とは、本質的に「集合全体を近似する部分集合を求める」理論である。組合せデザインが与えられた時、結合行列とよばれる行列で特徴付けできる。多くの研究者が様々な組合せデザインの結合行列の階数を有限体上で考えた p-ランクを研究している。その理由は，結合行列の p-ランクが比較的小さい 2-デザインから，比較的多くの情報量を持つ線形符号を得ることができるためである。さらに、これらの結果は、同じパラメータを持つ 2-デザインの分類に役立つ可能性がある。対称 2-デザインとその双対的な組は、タイプ(2,2;2)coherent configuration とよばれるアソシエーションスキームの一般化と等価である。coherent configuration から得られる隣接代数が得られ、この構造について考察した。標数 0 の体上の coherent configuration の隣接代数は、常に半単純であり、すでに研究されている。そこで、任意の標数の体上の対称 2-デザインから得られる coherent configuration の隣接代数の構造を決定した。具体的には対称 2-デザインから得られた coherent configuration の隣接行列の乗積表を計算する。それによって得られるタイプ(2,2;2)coherent configuration が確認できる。次に標数 p の体上における指標表とその時の代数構造の可能性を標数 0 の指標表をもとに考える。可能性は 4 つあることがわかる。隣接代数の半単純性を調べる時に用いるフレーム数を用いることで、与えられた対称 2-デザインのパラメーターに対して、4 つのタイプのうち、どの構造が現れるか明らかにした。また、1 番目から 3 番目の構造の場合は有限表現型なので、実際に標準加群の直既約直和分解が決定できる。しかし、4 番目の場合、無限表現型で構造が非常に複雑なので、標準加群の構造は決定できない。

　また、ボース・メスナー代数とは標数 0 の体の上のアソシエーションスキームの隣接代数であり、常に半単純である。ボース-メスナー代数には多くの結果がある。しかし、任意の体上のアソシエーションスキームの隣接環が定義できる。そこで、正標数の体上のアソシエーションスキームの隣接代数を考える。これをモジュラー隣接代数とよぶ。花木章秀氏(信州大)・吉川昌慶(兵庫教育大)は、クラス 2 のアソシエーションスキームのモジュラー隣接代数と標準加群の構造を考察した。彼らの論文で、モジュラー標準モジュールの直既約直和分解が、例え代数的に同型のアソシエーションスキームに対しても違いが現れることを示唆した。一般のアソシエーションスキームに対して標準加群の構造を決定することは、難しい。というのも、未だ適当な手法が開発されていないからである。現在のところ、与えられたアソシエーションスキームによって、モジュラー隣接代数を多項式環の剰余環で記述し、それを用いて、標準加群の直既約直和分解を求める。吉川氏は、ハミングスキームのモジュラー隣接代数を多項式環の剰余環で表現した。ハミングスキームのモジュラー隣接代数は半単純か局所環かのいずれかである。半単純の場合は、本質的にボース・メスナー代数と同じ結果が得られることがわかっているので、局所環の場合を考える。標準加群の直既約加群分解を考えるとき、非同型な直既約加群がどれくらいあるかが、分類の難易を決める。非同型な有限生成直既約加群は無限にあり難しい。そこで、標準加群において、極大な加群を構成し、直既約性を証明した。具体的には標数 2 の体 F 上のハミングスキーム H(n,2)のモジュラー標準加群の分解を考える。まず、V を $F[x_1, x_2, \dots, x_n]/(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$とし、W を V のインデックスに対する対称群の作用で不変な要素で生成される部分代数とする。すると、H(n, 2)のモジュラー隣接代数は W に同型であり、H(n,2)のモジュラー標準加群と V は、右 W 加群として同型である。V の極大部分加群を構成し、右 W 加群としての直既約性を証明した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 島袋　修
２．発表標題 ハミングスキームのモジュラー標準加群
３．学会等名 離散数学とその応用研究集会2019
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関