

令和 5 年 6 月 3 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03249

研究課題名(和文)代数多様体の導来圏の自己同値群の研究

研究課題名(英文) Research of the autoequivalence groups of derived categories of algebraic varieties

研究代表者

上原 北斗 (Uehara, Hokuto)

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：80378546

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体上の接続層の導来圏の研究を行った。特に、(i) spherical twistの亜種であるEnriques曲面上の導来圏の自己同値(exceptional twist)、(ii) (-2)-曲線を含むHirzebruch曲面の例外生成列に関するBondal-Polishchuk予想の解決、(iii) 任意標数体上の楕円曲線上の \mathbb{P}^1 -束のFourier-Mukaiパートナーの研究などを行った。(ii)では元々del Pezzo曲面の場合に知られていた結果をweak del Pezzo曲面である(-2)-曲線を含むHirzebruch曲面の場合に拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

接続層の導来圏は代数多様体の重要な不変量として知られており、多元環の表現論、ホモロジカルミラー対称性、代数多様体の分類理論など、広い分野と関係する興味深い研究対象である。接続層の導来圏の研究は、ここ20年で代数幾何学の研究テーマとしても、かなり大きな部分を占めるようになってきたといえる。私は特に、与えられた代数多様体の導来圏の生成元である例外生成列や、導来圏の自己同値群に関して興味を持って調べてきた。これらは、接続層の導来圏の研究の中でも、かなりメジャーなトピックと言え、今後様々な研究に広がっていくと思われる。

研究成果の概要(英文)：I studied the derived category of coherent sheaves on algebraic varieties. In particular, (i) I studied exceptional twists on Enriques surfaces, which is a subspecies of a well-known autoequivalence "spherical twists", (ii) we obtain a solution of Bondal-Polishchuk conjecture for a Hirzebruch surface containing a (-2)-curve, and (iii) I study Fourier-Mukai partners of elliptic ruled surfaces over arbitrary characteristic fields. In (ii), an affirmative answer for Bondal-Polishchuk conjecture was known for del Pezzo surfaces, but we show that it is true for a Hirzebruch surface containing a (-2)-curve, which is an example of weak del Pezzo surface.

研究分野：代数幾何学

キーワード：接続層の導来圏 代数多様体の分類理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数多様体上の接続層の導来圏の研究は、1990年頃から盛んに研究され始め、ホモロジカルミラーシメトリーなどを通して超弦理論、マッカイ対応などを通して表現論などと関係し、それらとのかかわりに加え、代数多様体の分類理論や、代数多様体の有理性問題などとも関係し、代数幾何学の枠組みにとどまらず、未だに研究が盛んな分野である。特に私は、主に代数多様体の分類論とのかかわりに興味を持って研究している。

2. 研究の目的

代数多様体の接続層の導来圏の性質は様々な側面から研究されている。特に私の研究では与えられた代数多様体の導来圏と同値な導来圏を持つような代数多様体 (Fourier - Mukai パートナー) の研究や、導来圏の自己同値群の生成元や特性を調べたり、さらにそれを通して代数多様体の分類や、個々の代数多様体の性質を探るのがその目的である。

3. 研究の方法

特定の代数多様体 (例えば、weak del Pezzo 曲面、Enriques 曲面、楕円曲線上の射影直線束) などについて、その自己同値群、例外生成列の様子や構造、さらに Fourier - Mukai パートナーなどを調べた。さらに最近では正標数の代数多様体の導来圏も研究対象として、幅広く調べている。

4. 研究成果

(1) 一般に接続層の導来圏に球対象と呼ばれる対象が存在したとき、それに伴い、球面捻じりと呼ばれる導来圏の自己同値が存在する。球対象は、Grothendieck 群のレベルでは、鏡映を与え、様々な方面から研究されている複雑で興味深い自己同値である。例えば $K3$ 曲面上の導来圏には必ず球対象が存在するので、 $K3$ 曲面の導来圏の自己同値群は複雑で難しく、さらにその自己同値群は Bridgeland による安定性条件の空間の構造にも関係し、大変興味深い研究対象として知られている。一方 Enriques 曲面上には (球対象のみならず) 例外対象と呼ばれる対象が存在する。この例外対象は考えている Enriques 曲面の $K3$ 被覆による引き戻しを考えると、球対象になり、その結果、Enriques 曲面上の例外対象は例外捻じりと呼ばれる、特有の新たな自己同値を導く。私の研究ではこの例外捻じりの基本的性質と、例外捻じりを導く例外対象を持ち上げて得られた球対象の球面捻じりの関係などを調べた。

(2) 名古屋大学の石井亮氏、大阪大学の大川新之介氏と共同研究では、weak del Pezzo 曲面上の例外生成列に関して、Bondal-Polishchuk 予想を調べた。一般に与えられた三角圏の例外生成列全体の集合には組み紐群が作用することが知られており、Bondal-Polishchuk 予想ではこの作用が推移的であることを予想している。

一方 weak del Pezzo 曲面上には (-2) 曲線が存在し、その上の直線束は元の weak del Pezzo 曲面の導来圏の球対象であることがわかるので、必然的に複雑な自己同値である球面捻じりが存在する。例外生成列を球面捻じりで移したのも例外生成列となり、これらが上記の組み紐群の作用で移りあうことは極めて非自明であるが、我々は特殊な weak del Pezzo 曲面に関してこれを示した。

さらに、与えられた例外列が例外生成列に伸ばせること、例外対象の構造定理なども示した。前者は元々 del Pezzo 曲面などでは知られていたが、上記の球面捻じりの存在により、weak del Pezzo 曲面では極めて非自明な問題である。後者に関しては、元々大川氏との共同研究で、例外層に関してその構造定理を示していたが、それを一般の例外対象に一般化した。

(3) 与えられた代数多様体 X と接続層の導来圏が同値になる代数多様体は X の Fourier--Mukai パートナーと呼ばれる。一般に標数が 0 の代数曲面において、非自明な Fourier--Mukai パートナー (自分自身と同型でない Fourier--Mukai パートナー) を持つのは、 $K3$ 曲面、アーベル曲面、小平次元が 0 でない楕円曲面であることが知られている。特に小平次元が負の場合、楕円曲面は射影平面を 9 点で爆発させたものか、楕円曲線上の射影直線束となる。私は標数が 0 の場合に、特に後者について、その Fourier--Mukai パートナーを調べたことがあった。一般に、楕円直線上の射影直線束は楕円曲線上の階数 2 のベクトル束で決まることが知られているが、標数が正の場合には、標数が 0 の場合には現れないようなベクトル束が現れるので、上記の問題は標数が 0 の場合と同様に証明できるわけではない。そこで、

私は、私の学生であった富樫高人氏との共同研究で、まず正標数の場合も含めた楕円曲線上の射影直線束がいつ楕円曲面の構造を持つか、さらにそれが楕円曲面の構造を持つとき、その特異ファイバーはどのようなになるかを調べた。

さらに同じく私の学生であった渡辺智信氏との共同研究によって、上記の富樫氏との共同研究の結果を用いて、特に正標数の場合に、楕円直線上の射影直線束の Fourier--Mukai パートナーの構造を完全に決定した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hokuto Uehara	4. 巻 371
2. 論文標題 A trichotomy for the autoequivalence groups on smooth projective surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 3529-3547
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7439	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Hokuto Uehara
2. 発表標題 Exceptional twists and Spherical twists on Enriques surfaces
3. 学会等名 代数・解析・幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hokuto Uehara
2. 発表標題 Exceptional collections on the Hirzebruch surface of degree 2
3. 学会等名 ZAG seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hokuto Uehara
2. 発表標題 Exceptional collections on Hirzebruch surface of degree 2
3. 学会等名 都の西北代数幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hokuto Uehara
2. 発表標題 Spherical objects on D_n -singularities
3. 学会等名 3rd Japanese-European Symposium on Symplectic varieties and Moduli spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 上原 北斗、戸田 幸伸	4. 発行年 2020年
2. 出版社 丸善出版	5. 総ページ数 496
3. 書名 連接層の導来圏と代数幾何学	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------