

令和 6 年 6 月 13 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03250

研究課題名(和文) 準遺伝被覆と関手の研究

研究課題名(英文) On quasihereditary covers and functors

研究代表者

宮地 兵衛 (Miyachi, Hyohe)

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90362227

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：巡回的Hecke代数及びその準遺伝被覆の表現圏の研究を主なテーマとして研究してきた。中国科学院の方明氏との共同研究で抽象化されたgendo-symmetric代数の支配的次元の導来不変性といった一般的なもの研究から、故郷である巡回的Hecke代数及び準遺伝被覆である有理的Cherednik代数の圏0の誘導及び制限関手に関するMackey公式(桑原氏と和田氏との共同研究)の発見を行ってきた。後半は、次数付き版の巡回的Hecke代数の既約加群と射影的加群のRobinsonの公式の構成や岩堀Hecke代数のKazhdan-Lusztig cellの群の元としてのMackey公式の発見をした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

表現論は、代数学、幾何学、解析学といった3大分野を横断するようにまたがり、数理物理にも応用される大切な研究分野である。主だって代数的Lie理論に属する表現論について成果をあげてきた。学術的には応用も多数あり、世界的に認知されている研究分野である。これらは基礎研究であって社会的意義を問うには時間が足りないと思われる。分かり易く表現論を比喩的に述べると高校化学で原子や分子といった最小単位を習うが、対称性が留まることができる空間をこれらと同様に原子にあたる最小単位や分子にあたるそれと分類し、全体はそれを並べたものであると理解する理論である。

研究成果の概要(英文)：My main research theme is the representation theory of cyclotomic Hecke algebras and their covers. There is a joint research with Ming Fong on dominant dimensions of gendo-symmetric algebras, saying those dimensions are derived invariants. This work is very abstract. Not only this, but in the home country, cyclotomic Hecke algebras world, Kuwabara (Tsukuba), Wada (Shinshu) and myself constructed Mackey formulas on inductions and restrictions for cyclotomic Hecke algebras and O over rational Cherednik algebras. Near the closing year, I constructed the graded version of Robinson's formula in cyclotomic quiver Hecke algebras and I found the Mackey formula for Kazhdan-Lusztig cells as group elements.

研究分野：表現論

キーワード：表現論 Hecke Kazhdan-Lusztig quantum

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Lascoux-Leclerc-Thibon 予想の有木進による解決以後、Chuang-Rouquier の sl_2 -圏化、量子群の圏化と凄まじい勢いで、巡回的 Hecke 代数及びその準遺伝被覆である有理的 Cherednik 代数の圏 \mathcal{O} や巡回的 Schur 代数の表現論は進展した。この流れでは、巡回的 Hecke 代数は次数付きになり cyclotomic quiver Hecke 代数というものになる。これらの次数付き表現圏の関手が affine 量子群の圏作用である。

2. 研究の目的

岩堀 Hecke 代数を含む巡回的 Hecke 代数とその準遺伝被覆の表現圏を研究する。一つ前の課題であったように有理的 Cherednik 代数の圏 \mathcal{O} は次数付けられて更に level-rank 双対は、の圏化は Koszul+Ringel 双対であるというのが Chuang 氏と小生の予想であり、Varagnolo-Vasserot, Shan, Rouquier らにより証明された。このような問題意識で高次 level である巡回的 Hecke 代数の表現論を研究し、主に "translation" にあたる誘導や制限、並びに主な研究対象である準遺伝被覆が入るより一般の設定で導来不変性定理を研究目的とした。

3. 研究の方法

高校化学でいうと原子や分子といった最小単位がある。表現論で言えば、原子は既約加群であり、分子は直既約加群である。全体はこれらを並べたものであると理解する理論である。

ところが、原子はラベルが分類できるが既約加群の次元が明示公式として分からない。分子は分類不可能であるという定理が存在する表現論の分野で研究している。

関手を用いること、圏論的手法では、分子全体を見比べると比較できることがあり得るメリットがある。これが主な方法である。

4. 研究成果

[1] Gendo-symmetric 代数などで支配的次元は、導来不変であることを方明氏(中国科学院)と共に示した。有理的 Cherednik 代数の圏 \mathcal{O} や cyclotomic Schur 代数の表現圏の導来圏には、この定理が適用できる。支配的次元は、標準加群(Weyl 加群)とその Schur 関手像で Ext^n をどの n まで保つかも判定するため、非常に有用な次元である。

[2] 桑原氏(筑波大), 和田氏(信州大)と共に巡回的 Hecke 代数及び関連する有理的 Cherednik 代数の圏 \mathcal{O} の誘導及び制限関手に関して Mackey 公式を発見した。より正確には、巡回的 Hecke 代数の standard parabolic 代数らの間の誘導と制限関手に関する Mackey 公式であり、有限群の場合と異なり、部分代数に制限がかかっている。ところが、有理的 Cherednik 代数では、standard の修飾語が取れて parabolic subgroups に関する有理的 Cherednik 代数のクラスの間の誘導及び制限関手に関する Mackey 公式である。

[3] cyclotomic quiver Hecke 代数について既約加群及び射影加群に関する Robinson の定理を構成した。(Robinson は有限群のモジュラー表現について定理を構成した。)

$P(X)$ で X の射影被覆を書く。 A を cyclotomic quiver Hecke 代数とし、 B を適切な部分代数とする。 D を A の既約加群、 E を B の既約加群とすると、

誘導加群 $\text{Ind } E$ に入っている $P(D)$ の次数付き重複度と制限加群 $\text{Res } D$ に入っている $P(E)$ の次数付き重複度が一致するというのが主定理である。

[2]と同様に standard parabolic にあたる部分代数 B のクラスに関する誘導と制限に関する定理である。Cyclotomic quiver Hecke 代数であるので、次数付きになっているのと、block に制限されているため、"部分群" 相当する部分に制限があるものの話が少なくとも 2 方向に拡張されている。実は、cyclotomic quiver Hecke 代数にする必要はなく、次数付き自己入射的代数で、係数体に関する双対が次数 shift で同型になる等の適切な仮定を付けた場合に成立する。

[4] 岩堀 Hecke 代数の Kazhdan-Lusztig cells について群の元としての Mackey 公式を構成した。Barbasch-Vogan により primitive ideal の話から群の元として Kazhdan-Lusztig の左 cell に関して誘導作用と制限作用が定義される。これらは、左 cell 表現の誘導と制限とも整合していることが知られている。

行者の定理、並びに Leclerc-宮地の定理により B 型岩堀 Hecke 代数の Kazhdan-Lusztig 左 cell 表現は、標数 2 の体の generic parameter の際の直既約射影加群全体を与えることが知られている。つまり、この時は、Mackey 公式が表現圏の level で成立することが分る。このことから、群の元の level でも Mackey 公式が成立するのではないかと予想を立て、その通りに証明できた。新しい Mackey 系となっているのも興味深い。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Toshiro Kuwabara, Hyohe Miyachi, Kentaro Wada	4. 巻 58
2. 論文標題 On the Mackey formulas for cyclotomic Hecke algebras and categories \mathcal{O} of rational Cherednik algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 103-134
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/78993	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Fang Ming and Hyohe Miyachi	4. 巻 371
2. 論文標題 Hochschild cohomology and dominant dimension	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 5267--5292
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7704	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 宮地兵衛
2. 発表標題 On two reciprocities on Hecke algebras
3. 学会等名 Representation Theory, Combinatorics and Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮地 兵衛
2. 発表標題 Hochschild コホモロジーと支配的次元
3. 学会等名 RIMS共同研究 有限群のコホモロジー論とその周辺（国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Winter School on Koszul Algebra and Koszul Duality https://ryokanda.net/conferences/koszul2021/?lang=ja Researchmap https://researchmap.jp/read0132976 Research map https://researchmap.jp/read0132976/
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Integrable Systems and Quantum Groups In Honor of Masato Okado's 60th Birthday	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Winter School on Koszul Algebra and Koszul Duality	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------