

令和 5 年 5 月 21 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03257

研究課題名（和文）パーフェクトイド空間の研究と可換代数への応用

研究課題名（英文）A study on perfectoid spaces and applications to commutative ring theory

研究代表者

下元 数馬（SHIMOMOTO, Kazuma）

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：70588780

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：Y. Andreによる直和因子予想がパーフェクトイド空間の手法を用いて解かれて以来、混合標数の可換環論の研究が大きな進展を遂げてきた。当該研究において、big Cohen-Macaulay代数の構成の精密化、パーフェクトイド・アビヤンカーの補題の拡張、パーフェクトイド空間の非完備化とネーター環論への精密化などに関して幾つかの重要な成果を挙げることが出来た。また可換環を乗法的モノイドとして捉えることで新しい知見が得られることも明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は近年、大きな進展を遂げつつある数論幾何学やLanglandsプログラムに見られる新しい手法や考え方から影響を受けていることを強調したい。可換環と呼ばれるある種の代数系は専ら体を含む状況において研究が進展してきた。体を含まない状況においては整数環といった数論的に重要な対象が含まれることもあり、永らくそのような研究が活性化することが切望されていた。本研究では体を含まない可換環を研究するが、最終的な狙いは数論において大域体と呼ばれる対象を扱う手法を開発することにある。

研究成果の概要（英文）：Since Y. Andre proved the direct summand conjecture, there has been tremendous progress in the research of commutative ring theory in mixed characteristic. We have succeeded in obtaining some deep results, including refined forms of big Cohen-Macaulay algebras, an extension of Perfectoid Abhyankar's lemma to non-perfectoid rings. Besides, it has been well understood that commutative rings could be studied by observing them as commutative monoids.

研究分野：代数学

キーワード：可換環論 代数多様体の特異点 Banach環 パーフェクトイド空間 Frobenius写像

## 1. 研究開始当初の背景

2010年頃に導入されたパーフェクトイド空間の登場によって、周辺分野、特に代数幾何学、可換環論、表現論、数論幾何学において大きな進展がもたらされた。特に可換環論における40年以上未解決であったホモロジカル予想が Y.Andre によって解決されたことが本研究の大きな動機付けとなっている。1980年代には Hochster-Huneke によって正標数の可換環を調べる方法が確立されていた。これは Frobenius 写像を用いる純代数的な理論である。同時期に代数多様体の極小モデルを扱う幾何学的理論が登場した。これらの理論の背後に共通するのが、ある種の緩やかな特異点を積極的に扱うことである。広中の特異点解消理論において特異点は避けるべき対象であるとされたが、特異性を許した代数多様体や可換環を扱うことが避けることが出来ない状況があることが、多くの数学者達の努力によって明らかにされてきた。また Wiles の Fermat の最終定理の解決以降、数論においても特異点の解析が重要であることが明らかになった。幾何学的または数論的な特異点を扱うための基本的な手法が可換環であることはこれまでの膨大な研究成果によって示されている。また標数が零であるか正であるかによって出現する数学的現象は異なり得るが、本研究で扱う混合標数、または同じことであるが体を含まない可換環はある意味で異なる標数を同時に扱う役割を担っていると言える。これまでの伝統的な可換環論の研究において混合標数を持つ対象が積極的に考察されたとは言えない状況であった。Y.Andre によるホモロジカル予想の解決はその意味において重要な転換点と考えられる。

## 2. 研究の目的

以下で研究の目的を簡潔に述べる。

- (1) 当該研究は Y.Andre による直和因子予想の解決、特に「Perfectoid Abhyankar's Lemma」から大きく影響を受けている。この論文で示された新しい考え方、特に現時点でも茫洋としている非ネーター環の解析すべき課題を明らかにし、その為に強力な手法を開発することが第一の目的である。
- (2) ホモロジカル予想は殆ど完全に解決されたが、まだ依然として解決されていない課題もある。特に Hochster-Huneke による密着閉包の理論の混合標数における類似が何なのかが明らかにされていない。現在、big Cohen-Macaulay 代数を用いた密着閉包や特異点の解析が進んでいるが、本研究において big Cohen-Macaulay 代数の存在だけでなくより精密な構造を持つものを具体的に構成することが第二の目的である。
- (3) 混合標数を持つ可換環論の研究に関して、ホモロジカル予想以外の研究課題や方法論が依然として未開拓の状況である。体を含む状況では小平の消滅定理、特異点解消、Frobenius 写像など強力な道具が揃っているが、混合標数においてもこれらと同等なものを開発することが必然である。特に特異点の新しいクラスを発見し、解析することが第三の目的である。

## 3. 研究の方法

- (1) 密着閉包の理論では Frobenius 写像が主要な道具として使われるが、密着閉包の理論は元来、ネーター環の構造解析を目指したものである。そこで密着閉包の中から非ネーター環の解析に使えるようなものを探索して、適用範囲を広げることを目指した。特に完全環(perfect ring)の理論は必然的にネーター環の枠組みを超えるが、ホモロジー代数の手法はネーター環で確立した部分に修正を加えることによって正標数の非ネーター環に役立つかを調べた。この一連の考察において、Bhatt-Scholze による論文「Projectivity of Witt vector affine Grassmannian」の解析が役立った。
- (2) パーフェクトイド空間の理論が Scholze、Kedlaya-Liu らによって創始された当初は、Banach 環論が中心的な役割を果たした。現在進行している非ネーター環の解析には大きく分けると三つの方法がある。一つ目はホモロジー代数・イデアル論によるもの、二つ目は Banach 環を用いるもの、三つ目は導来代数幾何学を用いるものである。本研究では主に Banach 環論を用いる。パーフェクトイド空間の先端の研究においては導来代数幾何学の方が主流であるが、Banach 環論の方が古典理論に近いこともあり、より親しみやすいという利点がある。関連する文献を読み込むことでより深い理解が得られた。可換環論に応用することによって、理論の優位性と重要性が認知されるが、例えば既存のネーター環で既に知ら

れている古典的な結果に新たな証明を付けることが可能であるかも調べた。例えば、Bhattacharyya-Ma による「Regular rings and perfectoid algebras」においてその様な実例が見られる。ネーター環の正則判定条件以外にも、例えば Cohen-Macaulay 性、Gorenstein 性に対しても同様なアプローチが可能であるかについても調べたが、現在継続中である。

- (3) ネーター環において完備環は重要であるが、パーフェクトイド空間やより直近のプリズマチック・コホモロジー論においても完備性は本質的な条件である。一方で、完備性を仮定しない枠組みを構築することも重要である。大域的な整数環上で理論を構築することは整数論への将来的な応用を見込んだ場合に必要となる。そこで Andre による論文「Perfectoid Abhyankar's Lemma」で展開されている理論の中から完備性が外せるものがないか考察を行った。現段階において使える強力な理論はまだ知られていないが、技術的な課題として残された部分を詳細に調べた。ネーター環論でよく知られた結果を非ネーター環へと拡張することで克服することが出来た。Kedlaya-Liu の「Relative p-adic Hodge theory」が基本的文献として役立った。
- (4) 局所コホモロジー論は可換環論において頻繁に使われる重要な道具である。コホモロジー加群には Frobenius 作用があるが、F-特異点論においては膨大な研究の蓄積がある。このアイデアを混合標数に拡張することが本質的である。Witt 環上の Frobenius 写像や正標数から混合標数に持ち上げ可能性の問題を調べた。望ましい特異点を持つ可換環の構成の際に古典的な変形理論のみでは間に合うことも判明した。

#### 4. 研究成果

以下の研究成果が得られた。

- (1) パーフェクトイド空間の基本定理とも言うべき概純性定理 (almost purity theorem) を付値環の場合において別証明を得た。その際に Faltings によって導入されたネーター的でない加群上で定義された正規化長さ関数と Frobenius 写像での振る舞いに関するある種の等式を導いた。概純性定理はこれ以外にも、分岐理論などを用いたものが知られている。これは伊城慎之介氏との共同研究で得られたものである。正規化長さ関数は混合標数の特異点の解析でも使われており、F-符号数やイデアル類群の研究への応用がある。正規化長さ関数は更なる応用の可能性を秘めており、これについては研究を継続中である。
- (2) 混合標数の離散付値環上の正規射影スキームの Bertini 型定理を調べた。応用として因子類群に関する Grothendieck-Lefschetz 定理を示した。これは堀内淳氏との共同研究である。堀内氏とは数年にわたって混合標数の Bertini 型定理に役立つような手法について調べており、現在も継続中である。この研究においては局所理論と射影スキームといった大域理論の部分に分かれるが、射影スキーム上の Bertini 型定理において局所環上の Bertini 型定理が本質的であることが理解できた。また正規以外のクラスである弱正規性 (weakly normal) においても有効であることが理解できた。
- (3) 準優秀環のクラスがイデアル完備化で良い振る舞いをするを示した。この事実は O.Gabber による未出版の結果であるが、証明の詳細を含んだ論文を出版した。もう一つの成果として Cohen-Gabber の定理のより初等的な証明を得た。Gabber による証明は難解なものであり、結果の重要性を鑑みて別証明を試みた。これらの結果は F-特異点論に多くの応用があり様々な研究論文で引用されている。上記の研究はいずれも藏野和彦氏との共同研究によるものである。
- (4) Y.Andre による概パーフェクトイド Cohen-Macaulay 代数を改良して、パーフェクトイド Cohen-Macaulay 代数を具体的に構成した。エタール拡大の繰り返しと概純性定理を用いることで十分に沢山の Cohen-Macaulay 代数が存在することを明らかにした。実際、この結果は Andre 氏により弱関手性を持つ場合へと拡張された。弱関手性問題の特別なケースが Heitmann-Ma によってそれ以前に得られている。現在、これらの結果の精密化を試みており、特異点の問題、特にパーフェクトイド F-符号数、因子類群への応用を目下、検討中である。Banach 環によるアプローチも試みているが、まだ成果を挙げるに至っておらず、今後の課題として残されている。
- (5) Gorenstein 環の弱いバージョンである準 Gorenstein 環の変形問題に対する反例を与えた。Macaulay2 による計算例であるが、問題点として得られた反例が正規環ではなく、より幾何学的な構成法が望まれる。肯定的な方向性として形式スキームに関する Lefschetz 条件を

用いて代数幾何学的な条件を調べた。準 Gorenstein 環は Cohen-Macaulay 性が成立しない状況において、代数多様体のモジュライ空間のコンパクト化問題とも関係しており、今後、重要性が増すと考えている。本研究は谷口直樹氏、Ehsan Tavanfar 氏との共同研究によるものである。

- (6) パーフェクトイド空間の理論のネーター環による近似を与えるものとしてパーフェクトイド・タワーの概念を導入し、基本的な性質を明らかにする研究を行った。この研究の主たる目的は、これまで殆ど議論されなかったパーフェクトイド空間の理論とネーター環との直接的な関係性を明らかにし、特異点論の研究に応用することである。本研究は伊城慎之介氏、仲里溪氏との共同研究である。基礎理論は完成したと言えるが、現在、適用範囲を広げるために重要な実例を幾つか計算しながら研究を進めている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazuhiko Kurano, Kazuma Shimomoto	4. 巻 61
2. 論文標題 Ideal-adic completion of quasi-excellent rings (after Gabber)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 707-722
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2021-0011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shinnosuke Ishiro, Kazuma Shimomoto	4. 巻 226
2. 論文標題 Another proof of the almost purity theorem for perfectoid valuation rings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2021.106898	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kei Nakazato, Kazuma Shimomoto	4. 巻 589
2. 論文標題 Finite etale extensions of Tate rings and decompletion of perfectoid algebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 114-158
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.09.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuma Shimomoto, Naoki Taniguchi, Ehsan Tavanfar	4. 巻 562
2. 論文標題 A study of quasi-Gorenstein rings II: Deformation of quasi-Gorenstein property	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 368-389
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.06.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Horiuchi Jun, Shimomoto Kazuma	4. 巻 47
2. 論文標題 Normal hyperplane sections of normal schemes in mixed characteristic	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 2412-2425
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2018.1470244	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kurano Kazuhiko, Kazuma Shimomoto	4. 巻 70
2. 論文標題 An elementary proof of Cohen-Gabber theorem in the equal characteristic $p>0$ case	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 377-389
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj/1537495352	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuma Shimomoto	4. 巻 372
2. 論文標題 Integral perfectoid big Cohen-Macaulay algebras via Andre's theorem	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1167-1188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-018-1704-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 下元数馬	4. 巻 74
2. 論文標題 パーフェクトイド空間とその直和因子予想への応用	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数学 (日本数学会)	6. 最初と最後の頁 356-380
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 下元数馬
2. 発表標題 Perfectoid Spaces-Part 1
3. 学会等名 Virtual Commutative Algebra Seminars (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 下元数馬
2. 発表標題 Perfectoid Spaces-Part 2
3. 学会等名 Virtual Commutative Algebra Seminars (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 下元数馬
2. 発表標題 数論と可換環論の応用ーホモロジカル予想を超えてー
3. 学会等名 日本数学会・秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 下元数馬
2. 発表標題 変形理論によるネーター環の探索
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kei Nakazato, Kazuma Shimomoto
2. 発表標題 Almost integrality and almost finite etale extensions (joint with Kei Nakazato)
3. 学会等名 第41回可換環シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuma Shimomoto, Kei Nakazato
2. 発表標題 Decompleting perfectoid Abhyankar's lemma and almost Cohen-Macaulay algebras (joint with Kei Nakazato)
3. 学会等名 第41回可換環シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuma Shimomoto
2. 発表標題 Decompleting perfectoid algebras and the almost purity theorem
3. 学会等名 Morgantown Algebra Days (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 下元数馬
2. 発表標題 疑ゴレンシュタイン環の変形問題
3. 学会等名 東大可換環論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 下元数馬
2. 発表標題 What is perfectoid commutative ring theory?
3. 学会等名 West Virginia University, Algebra Seminar/Colloquium (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------