

令和 4 年 6 月 4 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03259

研究課題名(和文) 岩澤理論と非可換不分岐ガロワ群論の研究

研究課題名(英文) Studies of Iwasawa theory and non-abelian unramified Galois groups

研究代表者

藤井 俊 (Fujii, Satoshi)

島根大学・学術研究院教育学系・准教授

研究者番号：20386618

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：円分体のイデアル類群のマイナス商について、任意の有限アーベル群がある n 分体のマイナス商の部分群に現れること、実アーベル体の円分拡大のマイナス商のlift写像の核の指数が、基礎体のみで定まる定数で抑えられることを示した。また、総実体のGreenberg予想の弱形に対する必要十分条件を得た。さらに、任意の素数に対して、一般Greenberg予想が成立する虚アーベル体が無数に存在することを示した。一般Greenberg予想に対する結果の応用として、非アーベル岩澤理論における非自由性予想が成立する代数体が無数に存在することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

円分体のイデアル類群のマイナス商(あるいは部分)は、様々な文脈で古来よく研究されてきた。本研究では、正整数 n を動かしたとき、 n 分体のマイナス商がどのように振舞うかを調べ、円分拡大の間のlift写像はほぼ単射であるという結果を得た。これは、円分拡大の新たな現象であるといえる。岩澤理論では、未解決問題の一つである一般Greenberg予想の研究を進め、非自明な成立例が無数に存在することが分かった。非自由性予想への応用も与えることもできたことから、岩澤理論の有用性を示し、非可換ガロワ拡大の研究に対する理解を与えることができたと考える。

研究成果の概要(英文)：I obtained the following results. (1) Each finite abelian group appears as a subgroup of the minus quotient of the ideal class group of the n -th cyclotomic field for some n . (2) For each real abelian field k , there exists a constant C depending only on k , such that exponents of the kernels of lifting maps on minus quotients among cyclotomic extensions of k are bounded by C . (3) Giving criteria of the non-triviality of finite submodules of Iwasawa modules over totally real fields. (4) For each prime number, there exist infinitely many imaginary abelian fields with non-trivial pseudo-null Iwasawa modules. As a corollary, there exist infinitely many number fields for which non-freeness conjecture hold.

研究分野：代数的整数論

キーワード：円分体 イデアル類群のマイナス商 一般Greenberg予想 非可換不分岐拡大 非自由性予想

1. 研究開始当初の背景

代数体のイデアル類群は、整数論における基本的な対象である。19世紀から研究されており、現在までに膨大な数の知見が得られている。類体論より、代数体のイデアル類群は最大不分岐アーベル拡大のガロワ群と自然に同型となる。したがって、代数体の不分岐拡大の研究は、イデアル類群の研究の自然な一般化となる。代数体の不分岐拡大について、ゴロドとシャファレヴィッチによる深い研究がなされていたが、不分岐非可換拡大の研究は難渋を極めている状況である。

p を素数とする。1950年代に創始された岩澤理論は、 \mathbb{Z}_p 拡大という無限次拡大を用いることにより、イデアル類群の深い理解を与えるものである。尾崎は、2007年の論文の中で、 \mathbb{Z}_p 拡大上で不分岐非可換 p 拡大の研究を創始し、不分岐 p 拡大の研究に新たな視点を与えた。

\mathbb{Z}_p 拡大上の最大不分岐 p 拡大のガロワ群の構造は、まだよく理解されていない状況であるが、尾崎の研究を基礎とし、様々な研究がなされるようになってきている。特に、非可換自由群にならないのではないかと「非自由性予想」と、定義関係式は有限個であろう、という予想が現在考えられている。また、イデアル類群の研究において、全円分拡大の岩澤理論を構築することが考えられてきたが、未だ基礎は築かれていない状況である。

2. 研究の目的

本研究の目的は次の通りである。

(1) 多変数岩澤理論における一般 Greenberg 予想の研究を進める。

(2) 円分 \mathbb{Z}_p 拡大上の最大不分岐 p 拡大のガロワ群の構造の理解のための研究を進める。特に、尾崎による「非自由性予想」の研究を進める。

(3) 円分拡大のイデアル類群の挙動を研究する。

3. 研究の方法

当該研究者は、(一般) Greenberg 予想が成り立てば、非自由性予想が成り立つことを示していることから、一般 Greenberg 予想の研究を進めることは、非可換な不分岐 p 拡大のガロワ群の構造の理解に役立つ。したがって、(一般) Greenberg 予想の研究を進めることは重要である。

円分拡大のイデアル類群の lift 写像の解析を、類体論やコホモロジーを用いることにより進める。

4. 研究成果

(1) 円分体のイデアル類群のマイナス商の部分群に任意の有限アーベル群が現れること、および、実アーベル体の円分拡大におけるイデアル類群のマイナス商の lift 写像の核の指数を評価すること。

k を総実体とし、非負整数 n に対して k_n を k に 1 の原始 n 乗根を添加した体、 k_n^+ を k_n の最大総実部分体とする。 C_n 、 C_n^+ を k_n 、 k_n^+ のイデアル類群とし、 C_n^- を lift 写像 C_n^+ C_n の余核とし、これを k_n のイデアル類群のマイナス商という。

まず、 k を有理数体とする。コーネルは、任意の有限アーベル群が C_n の部分群として現れることを示していた。当該研究者は、コーネルの議論をより詳細に調べることにより、次の結果を得た。

定理 1. k を有理数体とする。任意の有限アーベル群 C に対して、ある正整数 n が存在し、 C_n^- は C と同型な部分群を含む。

相対類数を含め、 C_n^- は古くから研究されている対象であるが、定理 1 によりアーベル群としての詳しい構造について、言及することができたことになる。

次に、マイナス商の間の lift 写像に関する結果について述べる。 k は一般の総実体とする。栗原は、任意の n に対して、 $C_n^+ \rightarrow C_m^+$ が零写像となる m が存在することを示している。したがって、マイナス商の lift 写像 $C_n^- \rightarrow C_m^-$ がどのような性質を持つかに興味を持たれる。当該研究者は次を示した。

定理 2. k を導手 d の実アーベル体とする。このとき、任意の正整数 $n, m, n|m$ に対して、lift 写像の核 $\text{Ker}(C_n^- \rightarrow C_m^-)$ は C_n^- の $4(d) - 1$ トーション部分群 $C_n^-[4(d)]$ に含まれる。 (d) は d のオイラー関数である。

正整数の組 n, m によらず、実アーベル体 k のみから定まる核の指数の上限が存在することは驚くべきことである。総実部分体のイデアル類群とは異なり、マイナス商の lift 写像はある意味

でほとんど単射といえる性質を持つことが確かめられたことになる。 C_{n^+} と C_{n^-} とは際立った違いがあることが認識された。

(2) 総実体の円分 Z_p 拡大の岩澤加群の有限部分加群の存在について。
素数 p と総実体 k に対して、 K/k を円分 Z_p 拡大とし、 X を K 上の最大不分岐アーベル p 拡大のガロワ群とする。Greenberg は、 X は有限であろう、という、総実体の Greenberg 予想を提示していた。 X^0 を X の最大有限部分加群とする。Greenberg 予想の弱形として、 $X = 0$ ならば $X^0 = 0$ ではないか、という問題が考えられる。以下、(2) を通して、 K の p 上の素点はただ一つとし、 K/k でその素点は完全分岐と仮定する。 また、 A_n を K/k の第 n 層のイデアル類群の p 部分とする。当該研究者は次の結果を得た。

定理 3 . 次は同値である。

- (i) $X^0 = 0$
- (ii) ある n が存在し、lift 写像 $A_0 \rightarrow A_n$ は単射でない。

Greenberg は、 $X = X^0$ であることと、ある n について $A_0 \rightarrow A_n$ が自明であることが同値であることを示していたが、定理 3 はこの結果の弱系に対する類似といえる。

定理 4 . 総実体 k 上の最大 p 外不分岐アーベル p 拡大での p 上の素点の惰性群は位数有限の元を持たないとする。このとき以下は同値。

- (i) $X^0 = 0$
- (ii) 最大 p 外不分岐アーベル p 拡大 M/K で p 上の素点の分岐は非自明である。

尾崎は、奇素数 p が k で完全分解するときに、定理 4 と同様の主張を示していたが、定理 4 は p が不分解の場合の類似である。

また、 $X^0 = 0$ であれば、 K の最大不分岐 p 拡大のガロワ群 G は非可換自由 pro- p 群とはならないため、次の系が得られる。

系 . 定理 3.(ii) または定理 4.(ii) の条件を満たすとする。このとき、 G は非可換自由 pro- p 群ではない、すなわち、自由性予想が成り立つ。

(3) 一般 Greenberg 予想が成立する虚アーベル体の無限族の存在。

代数体 k と素数 p に対して、 K/k を最大多重 Z_p 拡大とする。 X を K 上の最大不分岐アーベル p 拡大のガロワ群とすると、 X には完備群環 $R = Z_p[[\text{Gal}(K/k)]]$ が作用し、Greenberg によって X は有限生成ねじれ R 加群であることが示されている。さらに、Greenberg は、 X は R 加群として擬零、すなわち、零化イデアルの高さは 2 以上であろう、と予想した(一般 Greenberg 予想)。ガウス、ディリクレ、フェレロ、木田、ヨクノウィッツ、ピョン、伊東の結果を組み合わせると、任意の素数 p に対して、 $X = 0$ (特に X は擬零) となる虚二次体 k が無数に存在することがわかる。当該研究者は次を示した。

定理 5 . 任意の素数 p に対して、 $X = 0$ かつ X が擬零である虚アーベル体 k が無数に存在する。特に、 $X = 0$ かつ一般 Greenberg 予想が成り立つ代数体 k が無数に存在する。

定理 5 の証明と、以前より知られていた結果を組み合わせると、次の系が得られる。

系 . G を k の円分 Z_p 拡大上の最大不分岐 p 拡大のガロワ群とする。任意の素数 p に対して、 G がアーベル群でも非可換自由 pro- p 群でもない k が無数に存在する。特に、非自由性予想が成立する代数体 k が無数に存在する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Fujii, Satoshi	4. 巻 16
2. 論文標題 On minus quotients of ideal class groups of cyclotomic fields	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 2013-2026
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S1793042120501043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujii, Satoshi	4. 巻 96
2. 論文標題 Some remarks on finite submodules of the unramified Iwasawa module of totally real fields	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 83-85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.96.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Fujii and Tsuyoshi Itoh	4. 巻 30
2. 論文標題 Some remarks on pseudo-null submodules of tamely ramified Iwasawa modules	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux	6. 最初と最後の頁 533-555
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/jtnb.1038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Fujii	4. 巻 28
2. 論文標題 On families of imaginary abelian fields with pseudo-null unramified Iwasawa modules	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 New York Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 523-533
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 藤井俊
2. 発表標題 Reports on families of imaginary abelian fields with pseudo-null unramified Iwasawa modules
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤井俊
2. 発表標題 円分体のイデアル類群のいくつかの結果について
3. 学会等名 2020大分整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤井俊
2. 発表標題 円分体のイデアル類群のマイナスパートの挙動について
3. 学会等名 北陸数論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤井俊
2. 発表標題 円分体のイデアル類群のマイナスパートの挙動について
3. 学会等名 愛知数論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤井俊
2. 発表標題 ガロア理論統論
3. 学会等名 2019年度第27回整数論サマースクール 「構成的ガロア逆問題と不変体の有理性問題」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤井俊
2. 発表標題 類群問題, Cornelliの結果に対する注意
3. 学会等名 第17回北陸数論研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤井俊
2. 発表標題 ある虚二次体の円分的 Z_3 拡大上の最大不分岐 pro-3 ガロワ群の自由性について
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>島根大学教育学部藤井俊 https://www.edu.shimane-u.ac.jp/staff/staff116.html 島根大学教員情報検索システム https://www.staffsearch.shimane-u.ac.jp/kenkyu/search/937569865a147f1c4075611a3a2f67d5/detail 島根大学 教育学部 数学科教育専攻 藤井俊 https://www.edu.shimane-u.ac.jp/staff/staff116.html 藤井俊 島根大学教育学部 https://www.edu.shimane-u.ac.jp/staff/staff116.html</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------