

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：32689
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2021
課題番号：18K03261
研究課題名（和文）量子K理論におけるシューベルト・カルキュラス

研究課題名（英文）Schubert calculus in quantum K theory

研究代表者

池田 岳（Ikeda, Takeshi）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：40309539

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：一般旗多様体の量子 K 環において、シューベルト・カルキュラスを考える。A 型の場合に、K 理論的 Peterson 同型から得られるシューベルト類の対応を明示的に記述することに成功した。これは非常に具体的な多項式代表の間の対応である。

古典型の旗多様体においてヴェクシラリー元に対応するシューベルト多様体の特異点のヒルベルト・サミュエル重複度に対して、組合せ論的な表示を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子 K 理論におけるシューベルト・カルキュラスは、19 世期に展開された「数え上げ幾何学」の自然な発展であり、構造定数の正值性など、良い性質を持っている。そのような性質を保ったまま、さらに一般的な「コホモロジー理論」でシューベルト・カルキュラスを展開することはできないと考えられるいくつかの理由がある。その意味で、シューベルト・カルキュラスにおける最終的な目標である。今回、このような問題へのアプローチとして K 理論的 Peterson 同型を非常に明示的に与えたことは今後の発展への突破口になる。

研究成果の概要（英文）：We study Schubert calculus of quantum K-theory ring of generalized flag varieties. In type A, we succeeded in describing the correspondence of Schubert classes given by K-theoretic Peterson isomorphism, as the correspondence between concrete polynomial representatives of the Schubert classes.

In a flag variety of classical type, we study singularity of points on a Schubert variety associated with a vexillary element. We proved a combinatorial formula for the multiplicities.

研究分野：代数学，幾何学，組合せ論

キーワード：量子 K 環 アフィン・グラスマン多様体 Peterson 同型 ヒルベルト・サミュエル重複度 ヴェクシラリー

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

量子 K 理論は Givental と Lee によって導入された。その後, Buch, Mihalcea によるグラスマン多様体の場合のシューベルト構造定数の研究が最初の特筆すべき結果であると言える。

研究開始当初に知られていたこととして, 量子 K 理論のシューベルト・カルキュラスは Buch, Chaput, Mihalcea, Perrin によるミニマックス旗多様体に対するシュヴァレー規則 (2018) が一つの重要な結果であった。また, 長らく未解決であった有限性の問題が Anderson, Chen, Tseng (Iritani による付録) によって肯定的に解決された (2018 年のプレプリントが 2020 年に出版された)。一方, Lam, Schilling, Shimozono による, アフィングラスマン多様体の K ホモロジーの研究 (2010) が以前からあったが, その後に直接的に続く進展としては特筆すべきものは無かった。

上記のような状況で, 量子 K 理論とアフィングラスマン多様体の K ホモロジーをつなぐ結果として, 研究代表者らによる K 理論的 Peterson 同型が 2018 年には得られていた。その後, 加藤によって, K 理論的 Peterson 同型が一般的に証明された。加藤の結果によって, Lenart, 内藤, 佐垣 (2010) による半無限旗多様体のシュヴァレー規則が, 量子 K 理論に応用できる基礎が確立したと言える。

アフィン・グラスマン多様体の K 理論的ホモロジー環に対しても, Lam, Schilling, Shimozono による理論がある。そこで導入されたのは K 理論的な k -Schur 関数と呼ばれる。しかし, 構造層に対応する元は, K 理論的な k -Schur 関数ではなく, その「閉じた」バージョンであることが次第にはっきりと認識されるようになった。滝聞は, 「閉じた」K 理論的な k -Schur 関数に対する, k 長方形に関する「因数分解公式」を証明した。この結果は 2018 年の初めに発表されているので, 本研究課題の研究期間とちょうど重なっている。

2. 研究の目的

量子 K 理論におけるシューベルト構造定数を詳しく記述すること, その方法を与えることが研究の目的である。より具体的には古典型旗多様体, および古典型極大等方グラスマン多様体の場合を主に研究対象とする。シューベルト類を代表する特殊多項式, およびその積構造定数の探究は主要な目的であり, そのために多項式の明示式を与えることも重要な目的である。

3. 研究の方法

通常の K 理論 (量子版ではない) において, シューベルト構造層を表現する特殊多項式が知られている。例えば, 極大等方グラスマン多様体に対しては, 研究代表者が以前に構成した GP, GQ 関数と呼ばれるものがある。その他には, グラスマン多様体に対しては, グロタンディック多項式と呼ばれるものが基本的である。このような多項式は, 適当な剰余環において, 量子 K 環におけるシューベルト類を代表するという具体例が知られている。研究の方法の一つは, この見方を押し進めることである。

本研究計画のもう一つの特徴としては, K 理論的 Peterson 同型の積極的な活用が挙げられる。これは「量子 = アフィン」という標語で言い表される普遍的な原理である。量子コホモロジー環とアフィン・グラスマン多様体のホモロジーに関して, Peterson や Lam, Shimozono らによる理論である。代表者は A 型の最も基本的な場合に, K 理論的 Peterson 同型を見出した。

種々の特殊多項式を閉じた公式もしくは組み合わせ的公式により取り扱う。多項式と構造層を結びつける方法は, シュヴァレー規則や, ピエリ規則と呼ばれる結果である。2 つのシューベルト類の積を線型結合として書き表すことが最終目的であるが, 積の一方が「簡単な」類である場合の典型の明示式がシュヴァレー規則, ピエリ規則などと呼ばれる場合に当たる。多くの場合に, これらの規則は環の構造や, 一般の構造定数を「原理的に」決定する。

研究課題では, 構造定数を「原理的に決定する」ことではなく, すべて明示的に決定することを目的としているので, シュヴァレー規則等から, 一般の構造定数を明示的に求める道筋を見つけていくことが肝要である。

4 . 研究成果

Shimozono との議論 (2018 年 10 月頃に科研費により Virginia Tech を訪問した) の成果として, A 型の K 理論的 Peterson 同型を精密化を見出した. K 理論的 k -Schur 関数の「閉じた」バージョンを用いるということと, ある自己同型を施す必要があるという内容である. この精密化された予想は, 岩尾慎介, 内藤聡との共同研究によって肯定的に解決することができた. 旗多様体の量子 K 理論と アフィングラスマン多様体の K ホモロジーに対して, 互いのシューベルト類の対応を具体的な多項式レベルで与えることができた (arXiv:2203.14483). この結果は, 加藤による一般的な K 理論的 Peterson 同型の結果によっている.

上記と同じ論文において「閉じた」K 理論的 k -Schur 関数に対して Blasiak, Morse, Seelinger が与えた上昇演算子による予想式を証明することができた. 2019 年にスロベニアで開催された国際集会 Formal Power Series and Algebraic Combinatorics で Morse と議論したことは, Morse らが「閉じた」K 理論的 k -Schur 関数に目を向けるきっかけになった.

グラスマン多様体の量子 K 理論に対して, 対称関数環を適当なイデアルで割ることにより, グロタンディック多項式がシューベルト類を代表するという結果が得られた (D. Hiep, T. Matsumura, Y. Nakayama, S. Sugimoto との共同研究). これは Bertram, Ciocan-Fontanine, Fulton による量子コホモロジー環の場合の結果を拡張するものである. ただし, 結果はまだ部分的であり, 一般の構造定数を決定するために具体的なアルゴリズムを与えるものではなく, 完成を目指して研究を継続している. そのため, 成果の発表は口頭発表のみで, 論文はまだである.

古典型の旗多様体において, シューベルト多様体がヴェクシラリー元の場合に, 特異点のヒルベルト・サミュエル重複度を組合せ論的に表示する結果を得た (D. Anderson, M. Jeon, R. Kawago との共同研究). グラスマン多様体の場合に, 以前に得ていた結果に帰着するという方法であり, A 型の場合は Li, Yong による結果の別証明になっている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 D. Anderson, T. Ikeda, M. Jeon, R. Kawago	4. 巻 82B
2. 論文標題 Multiplicities of Schubert varieties in the symplectic flag variety	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 S'eminare Lotharingien de Combinatoire	6. 最初と最後の頁 1--12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Hudson, T. Ikeda, H. Naruse, T. Matsumura	4. 巻 546
2. 論文標題 Double Grothendieck Polynomials for Symplectic and Odd Orthogonal Grassmannians	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 294-314
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D. Anderson, T. Ikeda, M. Jeon, R. Kawago	4. 巻 --
2. 論文標題 Multiplicities of Schubert varieties in the symplectic flag variety	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 31st Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Ljubljana) 2019	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 9件/うち国際学会 8件）

1. 発表者名 T. Ikeda
2. 発表標題 Quantum K-theory of the Grassmannians, duality and its applications
3. 学会等名 Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Ikeda
2. 発表標題 Relativistic Toda lattice and q -theoretic Peterson isomorphism
3. 学会等名 Quantum q -theory and related topics, Korea Institute for Advanced Study (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Ikeda
2. 発表標題 Set-valued decomposition tableaux
3. 学会等名 Crystals and Their Generalizations (大阪市立大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Ikeda
2. 発表標題 Schubert calculus of Isotropic Grassmannians
3. 学会等名 Seminar, Sun Yat-sen university, Guangzhou, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Relativistic Toda lattice and q -theoretic Peterson isomorphism
2. 発表標題 Relativistic Toda lattice and q -theoretic Peterson isomorphism
3. 学会等名 Rikkyo MathPhys 2019年, 立教大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田岳・川合遼太郎
2. 発表標題 シューベルト多様体の特異点の重複度に関する予想
3. 学会等名 セミナー，岡山大学理学部
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Ikeda
2. 発表標題 \$K\$-theoretic Peterson isomorphism and its applications
3. 学会等名 Hessenberg 集会 2018 in Osaka (大阪市立大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Ikeda
2. 発表標題 \$K\$-theory Schubert calculus of the maximal orthogonal Grassmannian and set-valued decomposition tableaux
3. 学会等名 Geometry, Combinatorics and Integral Systems Seminar (Ohio State University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Ikeda
2. 発表標題 \$K\$-theory Schubert calculus of the maximal orthogonal Grassmannian and set-valued decomposition tableaux
3. 学会等名 Algebra Seminar (Virginia Tech) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 池田岳
2. 発表標題 K 理論的シューベルト・カルキュラス
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会（招待講演）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 池田 岳	4. 発行年 2018年
2. 出版社 東京大学出版会	5. 総ページ数 280
3. 書名 数え上げ幾何学講義	

1. 著者名 池田岳	4. 発行年 2022年
2. 出版社 東京大学出版会	5. 総ページ数 304
3. 書名 テンソル代数と表現論	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	松村 朝雄 (Matsumura Tomoo) (80755223)	国際基督教大学・理学部・准教授 (32615)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 大阪市立大学 数学研究所 文科省共同利用・共同研究拠点（一般）「幾何学と組み合わせ論の新しい融合」	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Ajou University			
米国	Virginia Tech University	Ohio state university		
ベトナム	Dalat University			