

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 9 月 9 日現在

機関番号：31302

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03264

研究課題名（和文）分岐被覆、微分方程式およびモジュライ空間を通じた代数曲線束のジオグラフィーの研究

研究課題名（英文）Study of the geography of fibrations through branched coverings, differential equations and moduli spaces

研究代表者

石田 弘隆 (ISHIDA, Hirotaka)

東北学院大学・情報学部・教授

研究者番号：30435458

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、特定の構造をもつ非特異射影代数曲線上の代数曲線束に関して、相対的オイラー・ポアンカレ標数、相対標準因子の自己交点数やファイバーの種数といった不変量がどのような値を取りうるかという代数曲線束のジオグラフィーの問題を研究した。主に射影直線束の3重被覆で与えられる代数曲線束について考察し、分岐跡の型に応じた不変量間の不等式を証明した。特に、スロープやオイラー・ポアンカレ標数の下限は、ファイバーの種数が3を法として2と合同である場合とそうでない場合では大きく異なることを示した。さらに、具体的に射影直線束の3重被覆を与えて多くの代数曲線束の存在性を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数曲線束のジオグラフィーに関する主要な問題の1つである「特定の構造をもつ代数曲線束の不変量がどのような値を取り得るか」に関して、先行研究が豊富とは言えなかった。本研究課題の成果により、特にファイバーの種数が3を法として2と合同であるかどうかによって、射影直線束の3重被覆で与えられる代数曲線束の不変量に制約があることが明確になった。他の代数曲線束の構造においても、本成果と同様の現象が予想でき、今後の代数曲線束のジオグラフィーの問題の進展が期待できると考える。

研究成果の概要（英文）：In this project, we studied the problem of the geography of fibrations of algebraic curves on a non-singular projective algebraic curve with specific structures which is the question of what values of the relative Euler-Poincare characteristic, the self-intersection number of the relative canonical divisor and the genus of a fiber can take. We mainly considered fibrations given by triple coverings of projective line bundles, and proved inequalities among these invariants that depending on the type of branch loci. In particular, we show that the lower bounds on the slope and the Euler-Poincare characteristic differ from each other depending on whether the genus of a fiber is congruent to 2 modulo 3 or not. Furthermore, we specifically gave triple coverings of projective line bundles and proved the existence of fibrations of algebraic curves.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数曲線束 代数曲面 分岐被覆 モジュライ空間 複素微分方程式

1. 研究開始当初の背景

一般型曲面は小平次元による代数曲面の分類において最大のクラスである。その研究は1960年代に始まる。オイラー・ポアンカレ標数や標準因子の自己交点数といった代数曲面の特徴を表す不変量は整数値をとり、これらの不等式の間にはBogomolov-宮岡-Yauの不等式などの関係がある。したがって、不変量は自由な値をとることはできない。1981年にPerssonは代数曲面のオイラー・ポアンカレ標数の値と標準因子の自己交点数の値の組を座標平面上にプロットするとき、不変量間の不等式関係から定まる平面上の領域内にある指定された格子点に対応する極小一般型曲面の存在性を問う問題を提起した。

この問題自体はPerssonによって標準因子の自己交点数とオイラー・ポアンカレ標数の値の比が小さい場合には解決され、その後も研究がなされてほぼ解決している。すなわち、座標平面を一般型曲面が生息する地図と考えると、その生息する範囲が分かったことになる。しかし、その範囲にある格子点にはどんな一般型曲面に対応するかといった詳細な情報が完全に分かっている訳ではない。このような一般型曲面が生息する範囲に関する問題は「一般型曲面のジオグラフィ」と呼ばれ、一般型曲面の主な研究指針となり、国内外で研究が行われてきた。特に、以下のような2つの問題に大別できる。

問題(1)：格子点に対応する一般型曲面はどのような構造的な特徴をもち得るか。

問題(2)：特定の構造をもつ一般型曲面に対応する格子点はどのように分布するのか。

問題(1)に関しては、不変量の値を固定したときに、一般型曲面の構造とそのモジュライ空間を調査するという形で多くの先行研究が存在する。一方で、問題(2)に関する研究成果は問題(1)と比較すると数が少ない。

2. 研究の目的

本研究課題では、「特定の構造」を代数曲線束とそのファイバーの特徴によって定めて、問題(2)を解決することを目的とする。代数曲線束とは、代数曲面から非特異代数曲線への連結なファイバーをもつ全射正則写像のことである。これは、非特異代数曲線上の点に対してファイバーである代数曲線が対応して、非特異代数曲線上の点をパラメータとしてファイバーが変形する対象と考えることができる。

代数曲線束の不変量には、代数曲面の不変量を相対化した相対的オイラー・ポアンカレ標数と相対標準因子の自己交点数がある。代数曲線束の構造に注目することに伴い、これらの値を組みにして座標平面上にプロットする。さらに、代数曲線束としての特徴を区別しながら、ジオグラフィの問題を考察するために、ファイバーの種数(ファイバーの位相型)やクリフォード指数を座標として加えることも行う。クリフォード指数はおおよそファイバーから射影直線への被覆次数を定める数値であり、クリフォード指数に関する数値的性質を与えることは代数曲線束に対して非特異代数曲線上の射影直線束の「分岐被覆」という一面を付加する。一方、代数曲線束は、代数曲面上の有理型1形式から定まる「微分方程式」の正則積分曲線の集合と一致する。また、代数曲線束のモジュライ写像の像はリーマン面の「モジュライ空間」内の曲線となる。これらの代数曲線束の諸相を手掛りに、問題(2)の解決に向けて、特に次のことを主目的とする。

目標(i)：代数曲線束に対応する格子点の分布を概ね把握するために、分岐被覆の理論や微分方程式の不変量の計算公式を用いて不変量間の不等式関係を究明する。

目標(ii)：射影直線束の分岐被覆、リーマン面のモジュライ空間上の曲線や微分方程式を元に代数曲線束の構成法を開発する。これらを用いて代数曲線束の分布領域を解明する。

3. 研究の方法

研究の方法としては次の3つの方法を採用。被覆理論によるアプローチ：クリフォード指数の値が1, 2であれば、少しの例外を除いてファイバーは射影直線の次数3, 4の被覆となる。5次以上の被覆理論の構築が期間内には困難であることから、3次被覆や4次被覆を用いてクリフォード指数の値を1, 2と固定する。ここで利用する分岐被覆の不変量の公式は、分岐跡と射影直線束の数値的性質から計算できる項と分岐跡の特異点によって定まる項から成る。分岐跡の特異点から定まる項の取り得る数値的な可能性を評価していくことで不変量間の不等式を得ることができる。

代表者の過去の研究において成果を得る鍵となったのは、2次被覆の分岐跡のパーツを様々組み合わせ、ある関数のグラフを境界とする上半領域内の格子点に対応する超楕円曲線束をすべて構成する方法の開発であった。この方法を3次被覆や4次被覆に発展させて、高次ガロア被

覆を用いた代数曲線束の構成法を開発して目標(ii)の解決にあたる。

モジュライ空間を用いた代数曲線束の構成:モジュライ空間を用いた代数曲線束の構成は小平ファイバー曲面の存在性の証明に着想を得たもので、代数曲線束のモジュライ写像の像にあたる曲線を代数曲線のモジュライ空間内にとり、安定化と特異点解消により復元するものである。相対的オイラー・ポアンカレ標数の値が大きい代数曲線束の構成に対して用いる。

代数曲線束の構造と微分方程式:でも述べたように5次以上の被覆理論を構築してさらなる進展を目指すのは難しいと考える。そこで、新たなアプローチとして複素微分方程式を考察する。代数曲線束と微分方程式の関係は19世紀のDarboux, Painlevé, Poincaréによる研究に始まり、昨年度開催された研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2017」にてS. L. Tan氏による代数曲線束とその複素微分方程式の基礎理論(不変量の定義とその関係式)が築かれた。しかし、ファイバーの種数は微分方程式の特異点の位相型だけでは定まらないなど、代数曲線束の構造と微分方程式の関係の解明は今後に残されている。本研究課題では、この理論を用いて目標(i)を達成することができるかを考察する。

4. 研究成果

ガロア3重被覆で与えられるスロープが $24/5$ となる代数曲線束に関しては相対的オイラー・ポアンカレ標数の値の下限はこれまでの研究から既知であった。このことを踏まえて2018-2019年度はこのような代数曲線束の存在領域を考察した。ファイバーの種数が7以上であるときに相対的オイラー・ポアンカレ標数の値がファイバーの種数のある2次式から定まる数値以上であるような代数曲線束がすべて存在することを証明した。その過程で、ファイバーの種数の値が3を法として2に合同な場合に構成できる代数曲線束の相対的オイラー・ポアンカレ標数の値の下限はそれ以外の場合と比べて大きくなることを示した。ファイバーの種数の値によって相対的オイラー・ポアンカレ標数の値の下限が異なることは、超楕円曲線束においても既知であったが、これと同様の現象が確認できた。同時期にTan氏による代数曲線束とその複素微分方程式の基礎理論を深化させていくために、超楕円曲線束を与えるような具体例の構成を試みた。特に、構成が易しい底空間が射影直線や楕円曲線となるような代数曲線束について、いくつかの例を構成することができた。

2020-2022年度は射影直線束の非ガロア3重被覆である場合にもスロープと相対的オイラー・ポアンカレ標数に関して調査し、部分的な成果ではあるが、一部の非ガロア3重被覆の場合も同様にスロープの下限がファイバーの種数の値が3を法として2に合同ではない場合とでは異なり、スロープの値を固定したときに相対的オイラー・ポアンカレ標数の値も同様であることを示した。さらに、巡回3重被覆の分岐因子の型に応じてスロープの下限が変化することも確認した。2022-2023年度では、2022年度までに得た目標(i)に関する成果に対して、スロープの値を固定したときに相対的オイラー・ポアンカレ標数の下限を実現する代数曲線束が実際に存在するか、すなわち目標(ii)に関して考察を行った。残念ながら、下限を与える代数曲線束の構成はできなかったが、具体的に条件に合致する射影直線束上の非ガロア3重被覆の構造をもつ代数曲線束を多数構成して、それらのファイバーの種数と相対的オイラー・ポアンカレ標数を座標とする点を座標平面上にプロットしたときに、座標平面上を埋める範囲を確認することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 T. Shirane, A. Sumitomo,	4. 巻 57
2. 論文標題 On effective divisors on certain double covers and their linearly equivalent classes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Mathematics, Tokushima University	6. 最初と最後の頁 63-84
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Shirane Taketo	4. 巻 171
2. 論文標題 Double covers and vector bundles of rank two	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 499-527
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-022-01405-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shirane Taketo	4. 巻 257
2. 論文標題 Galois covers of graphs and embedded topology of plane curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 122 ~ 143
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2019.03.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T.Ashikaga, Y.Matsumoto	4. 巻 34
2. 論文標題 Universal degeneration of Riemann surfaces and fibered complex surfaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics	6. 最初と最後の頁 179-262
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件（うち招待講演 22件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 石田弘隆
2. 発表標題 On certain triple coverings of projective line bundles
3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田弘隆
2. 発表標題 ある射影直線束の3重被覆で与えられる代数曲線束のスロープに関して
3. 学会等名 第17回代数曲線論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田弘隆
2. 発表標題 射影直線束のガロア被覆の構造をもつ一般型曲面について
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石田弘隆
2. 発表標題 射影直線束の巡回3重被覆の構造をもつ代数曲線束の地誌学
3. 学会等名 農工大数学セミナー2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 リーマン面の普遍退化族と複素ファイバー曲面のモジュライ I, II, III
3. 学会等名 Algebraic Geometry, Topology and Combinatorics (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 Universal degeneration of Riemann surfaces and its applications
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 Universal degenerating family of Riemann surfaces
3. 学会等名 Japan-Vietnam One Day Workshop (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 Universal degeneration of Riemann surfaces and fibered complex surfaces
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 足利正
2. 発表標題 リーマン面の普遍退化族と倉西族
3. 学会等名 函数論シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 今野一宏
2. 発表標題 Sextics and surfaces of general type, Degenerations, Algebraic surfaces and related topics
3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 白根竹人
2. 発表標題 Double covers and vector bundles of rank two
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム2020(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 白根竹人
2. 発表標題 Divisor class groups of double covers over projective spaces
3. 学会等名 阪大代数幾何学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 白根竹人
2. 発表標題 Modified plumbing graphs and Galois covers of plane curves
3. 学会等名 神戸代数幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 白根竹人
2. 発表標題 Divisor class groups of double covers over projective spaces
3. 学会等名 第 26 回代数曲面ワークショップ at 常三島 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 白根竹人
2. 発表標題 Double covers and vector bundles of rank two
3. 学会等名 第 22 回代数曲面ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 T. Shirane
2. 発表標題 A construction of line bundles on double covers and splitting curves,
3. 学会等名 Degenerations, algebraic surfaces and related topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Shirane
2. 発表標題 A construction of line bundles of double covers and splitting curves
3. 学会等名 Geometry in Pyrenees, Universit ´e de Pau et des Pays de l ´Adour (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 白根竹人
2. 発表標題 Galois covers of graphs and embedded topology of plane curves,
3. 学会等名 第 16 回代数曲線論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 白根竹人
2. 発表標題 Galois covers of graphs and embedded topology of plane curves
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺 2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 白根 竹人
2. 発表標題 Graphs and the embedded topology of plane curves
3. 学会等名 第 18 回代数曲面ワークショップ at 秋葉原 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 白根 竹人
2. 発表標題 Galois covers of graphs and embedded topology of plane curves,
3. 学会等名 幾何学コロキウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Shirane
2. 発表標題 Galois covers of graphs and embedded topology of plane curves
3. 学会等名 Fifteenth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Kunihiko Kodaira (translated by Kazuhiro Konno)	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 88
3. 書名 Theory of Algebraic Surfaces	

〔産業財産権〕

〔その他〕

第8回 代数幾何学研究集会-宇部- http://www2.ube-k.ac.jp/kmiura/ube2024.pdf 第7回 代数幾何学研究集会-宇部- http://www2.ube-k.ac.jp/kmiura/ube2020.pdf 第6回 代数幾何学研究集会-宇部- http://www2.ube-k.ac.jp/kmiura/ube2019.pdf
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	足利 正 (ASHIKAGA Tadashi) (90125203)	東北学院大学・工学総合研究所・客員教授 (31302)	
研究協力者	今野 一宏 (KONNO Kazuhiro) (10186869)	関西大学・総合情報学部・教授 (34416)	
研究協力者	白根 竹人 (SHIRANE Taketo) (70615161)	徳島大学・大学院社会産業理工学研究部・准教授 (16101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関