

令和 3 年 6 月 14 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03268

研究課題名(和文) 対称空間の対蹠集合の解明、拡張および応用

研究課題名(英文) Clarification, extension and application of antipodal sets of symmetric spaces

研究代表者

田崎 博之 (Tasaki, Hiroyuki)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：30179684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：連結コンパクトLie群の極地として実現できる古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類は、行列を使って具体的に記述できた。連結コンパクトLie群の極地として実現できない場合も、非連結コンパクトLie群の極地として実現でき、非連結コンパクトLie群の極大対蹠部分群の分類、それを利用した極地の極大対蹠集合の分類の研究を進めた。多くの場合に極大対蹠集合の分類を完成させた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連結コンパクトLie群の極地として実現できないコンパクト対称空間を非連結コンパクトLie群の極地として実現することにより、コンパクト対称空間の極大対蹠集合を詳しく調べる手法を確立したことは、極大対蹠集合の分類に役立っただけではなく、極大対蹠集合の幾何学的、代数的、組合せ論的性質を調べる上でも有用である。このように非連結コンパクトLie群の極地を解明することは学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：We explicitly describe the classifications of maximal antipodal sets in compact symmetric spaces of classical type which can be realized as polars of connected compact Lie groups. Even in the case where a compact symmetric space cannot be realized as a polar of a connected compact Lie group, it can be realized as a polar of a disconnected compact Lie group and we classify maximal antipodal subgroups in a disconnected compact Lie group and we proceeded with the research on classifications of maximal antipodal sets in polars. In many cases the classifications of maximal antipodal sets have been completed.

研究分野：微分幾何学

キーワード：対称空間 対蹠集合 実形の交叉 複素旗多様体 有向実Grassmann多様体

1. 研究開始当初の背景

科学研究費 基盤(C)「対称空間の対蹠集合の拡張と応用」(2015年度～2017年度)による研究成果から、対称空間のクラスに含まれる古典型コンパクト Lie 群の対蹠集合の分類、および基本的性質が明らかになっていた。そこで、その成果を発展させる本研究に着手した。

2. 研究の目的

本研究の研究目的は以下の3項目である。

(1) 対称空間内の対蹠集合および二つの鏡映部分多様体の交叉の対蹠性を解明する。以前の研究で対称空間のクラスに含まれる古典型コンパクト Lie 群の対蹠集合はすでに解明したので、コンパクト対称空間をコンパクト Lie 群に極地として埋め込み、分類結果を得ているコンパクト Lie 群の対蹠集合の性質からコンパクト対称空間の対蹠集合の性質を解明する。さらにこれらを利用して鏡映部分多様体による交叉積分公式の精密化を行う。

(2) 複素旗多様体に拡張された対蹠集合の概念をより普遍的な形で再定式化し、複素旗多様体内の二つの実形の交叉の対蹠性を解明する。二つの実形の交叉の詳しい性質は、実形を定める対合から定まる対称三対に反映すると思われ、交叉の性質と対称三対の性質を関連付ける。

(3) 有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合を解明しその具体的表示を与える。その応用としてある種の符号の性質、交代形式の標準形を有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合によって記述することや有向実 Grassmann 多様体の位相などとの関連性を明らかにする。

3. 研究の方法

研究目的の(1)と(2)は一つのコンパクト Lie 群から定まる二つの対称対さらには対称三対と密接に関係している。そこで二つの対称対または対称三対を利用してコンパクト対称空間内の二つ鏡映部分多様体の交叉および複素旗多様体内の二つの実形の交叉の対蹠性を解明する。また、コンパクト対称空間の多くはコンパクト Lie 群に極地として埋め込むことができ、これを利用してコンパクト対称空間の対蹠集合の性質をコンパクト Lie 群の対蹠集合の性質に帰着させて詳しく性質を調べる。研究目的の(3)は組合せ論の手法も利用して研究を進める。実ベクトル空間の交代形式は有向実 Grassmann 多様体の関数とみなすことができ、Morse 関数の理論を適用して交代形式と有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合の関連性を解明する。その応用として交代形式の標準形を決定する。

4. 研究成果

コンパクト対称空間内の対蹠集合の解明に関する研究目的(1)については、ほぼすべての古典型コンパクト対称空間およびその商空間の極大対蹠集合を求め、その中から大対蹠集合を決定し、その濃度である 2-number も求めた。先行する研究ですでに得ていた古典型コンパクト Lie 群およびその商群の極大対蹠部分群の分類結果を利用して、分類結果を行列を使って具体的に記述できた。これらの結果は Chen-Nagano の 2-number を求めた手法をより詳しくしたことになっており、田中真紀子氏との共著論文として論文リストの最初の論文として発表した。今までは主に連結なコンパクト Lie 群を扱っていたが、非連結コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の分類が重要になる場合もあり、これらの分類を進めるために非連結コンパクト Lie 群の極地の研究を始めた。コンパクト対称空間を連結コンパクト Lie 群に極地として埋め込めない場合でも、対称空間を定める対合による半直積を利用して非連結コンパクト Lie 群に極地として埋め込める。非連結コンパクト Lie 群への極地としての埋め込みはコンパクト対称空間の極大対蹠集合の性質を調べるために有効であることを明らかにした。さらに、非連結コンパクト Lie 群の極地を具体的に記述し、その分類をおおむね完成させた。今後は対称空間を定める対合による半直積の極地の具体的記述を利用して、コンパクト対称空間の極大対蹠集合の研究を進めていきたい。

G型コンパクト対称空間についても同様な成果を挙げることができた。この成果については田中真紀子氏、保倉理美氏との共著論文として原稿を執筆中である。

複素旗多様体に拡張された対蹠集合の概念をより普遍的な形で再定式化し、複素旗多様体内の二つの実形の交叉の対蹠性を解明するという研究目的(2)については、コンパクト型 Hermite 対称空間をコンパクト Lie 群の随伴軌道という観点から複素旗多様体に拡張して、そこでの二つの実形の交叉にこれまでの研究成果を拡張できた。その結果、複素旗多様体内の合同とは限らない二つの実形の交叉に関する Floer ホモロジーを具体的に求めることができた。この議論において対称三対を使った議論が有効だった。この成果のうち初期に得られた部分をまとめて、論文リストの2番目の論文として発表した。さらに成果の全体をまとめた井川治氏、入江博氏、奥田隆幸氏、酒井高司氏との共著論文を執筆中である。

有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合を解明するという研究目的(3)については、横系と

縦系という考え方を導入すると今までに分類または構成した極大対蹠集合の系列を体系的に記述できることがわかってきた。さらにこの横系と縦系はある全測地的部分多様体に起因することが明らかになった。また、階数 3 の有向実 Grassmann 多様体に極大対蹠集合として現れる Fano 平面の直線全体の集合をいくつかの観点から拡張できることを明らかにした。これによって、階数 5 以上の有向実 Grassmann 多様体の新たな極大対蹠集合の系列を構成できた。Fano 平面は二元体上の射影平面であることに注目して、有限幾何学の対象から有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合を構成することもできた。これまでに得られた極大対蹠集合で階数 5 の有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合は尽くされているかどうかについて検討している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M. S. Tanaka and H. Tasaki	4. 巻 73
2. 論文標題 Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101682 ~ 101682
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2020.101682	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki	4. 巻 82
2. 論文標題 On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 87-98
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計29件（うち招待講演 24件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 非連結コンパクト Lie 群の極地
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 非連結コンパクトLie群の極地
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 非連結コンパクトLie群の極地
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間」(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 例外型コンパクトLie群 G_2 の幾何
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 The intersection of two real forms in a Kahler C-space
3. 学会等名 Oberseminar Differentialgeometrie (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 グラスマン多様体とその商空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 第2回 水戸幾何小研究集会(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 Maximal antipodal sets of G_2 and $G_2/SO(4)$ and related geometry
3. 学会等名 The 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces & Related Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 例外型コンパクトLie群 G_2 の幾何
3. 学会等名 Workshop on Submanifold theory in a wider sense (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 Maximal antipodal sets of classical compact symmetric spaces
3. 学会等名 DGA2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 例外型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ の幾何
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 The intersection of two real forms in a Kahler C-space
3. 学会等名 Seminaire de Mathematiques et Colloquium (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 Maximal antipodal sets of classical compact symmetric spaces
3. 学会等名 The 2nd Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 八元数、 G_2 、対蹠集合、およびFano平面
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 Polars and antipodal sets
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 コンパクトLie群とコンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2019(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 Maximal antipodal sets related to G_2
3. 学会等名 AMS Special Session on Differential Geometry and Global Analysis, Honoring the Memory of Tadashi Nagano (1930-2017) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉
3. 学会等名 東北大幾何セミナー(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 複素旗多様体内の実形の交叉の対蹠性とFloerホモロジー
3. 学会等名 第65回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 複素旗多様体の実形の交叉とFloerホモロジーへの応用-合同とは限らない実形の場合-
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 コンパクト対称空間の実現とその応用
3. 学会等名 横田一郎先生追悼シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合I
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 Maximal antipodal sets of classical compact symmetric spaces
3. 学会等名 2018 joint Meeting of the Korean Mathematical Society and the German Mathematical Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 Antipodal sets of compact symmetric spaces
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 有向実Grassmann 多様体の対蹠集合
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田崎博之
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 幾何学と組合せ論2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 Maximal antipodal sets and polars of compact Lie groups
3. 学会等名 Oberseminar Differentialgeometrie (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>田崎博之のホームページ http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------