

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03269

研究課題名（和文）幾何的手法と圏論的手法の融合による開多様体のシンプレクティック幾何の研究

研究課題名（英文）Study of symplectic geometry combining geometric and categorical methods

研究代表者

二木 昌宏 (Futaki, Masahiro)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：40583927

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：射影空間とその直積、および次数1のヒルツェブルフ曲面について、運動量多面体のモースホモトピー圏を定義し、正則直線束のなすDG圏からモースホモトピー圏へのミラー関手の簡明な記述を与えた（梶浦宏成氏との共同研究）。これはSYZファイブレーションの描像に基づくホモロジー的ミラー対称性と見なせるものである。

また1次元射影空間および1次元複素平面について同変深谷圏を定義し、その曲率項がギヴェンタルのランダウ・ギンツブルグミラーポテンシャルを復元する事を見るときも、同変版のホモロジー的ミラー対称性を定式化・証明した（三田史彦氏との共同研究）。その際に同変化で現れる新しい現象を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一つ目の研究については、トーリックファノ多様体のホモロジー的ミラー対称性に対し、正則直線束とラグランジュ切断のミラー対応をより明快に理解できる可能性を示した点が意義である。

二つ目の研究については、長らく実現されていなかったリー群同変な深谷圏の定式化を与えた事と、それを用いて基本的な例について同変版のホモロジー的ミラー対称性を示した事が意義である。研究の道筋は深谷-Oh-太田-小野による非同変の場合を踏襲しているが、同変化により非同変の場合には存在しなかった深谷圏の対象が現れるなど、新しい現象を見出した事が今後の研究のさらなる展開を示唆している事も意義である。

研究成果の概要（英文）：We constructed a Morse homotopy category of the moment polytope in the case of the projective spaces, products of them and degree 1 Hirzebruch surface and gave a concrete description of the mirror functor from the DG category of holomorphic line bundles to the Morse homotopy category (joint work with Hiroshige Kajiwara). This is a version of homological mirror symmetry based on the SYZ fibration.

We also defined an equivariant Fukaya category of the 1 dimensional projective space and 1 dimensional complex plane and saw that the curvature term recovers Givental's equivariant Landau-Ginzburg potential, and proved a version of equivariant homological mirror symmetry. We also found a new phenomenon which does not occur in the non-equivariant case (joint work with Fumihiko Sanda).

研究分野：シンプレクティック幾何学、ホモロジー的ミラー対称性

キーワード：トーリック多様体 SYZファイブレーション モースホモトピー 同変コホモロジー 同変深谷圏 行列因子化

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究全体の目標は、閉とは限らないシンプレクティック多様体の深谷圏の構造についての理解を、ホモロジー的ミラー対称性予想と関連させつつ進める事である。深谷圏はシンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体を対象とする A 無限大(強ホモトピー結合的)圏であり、深谷賢治氏により導入された。深谷圏の A 無限大圏としての構造定数そのものは意味がなく、その導来圏(捻複体のなすコホモロジー圏を取る、ボンダル-カプラノフ構成を行ったもの)がシンプレクティック不変量となる。したがって以下で深谷圏と言うときは、断らない限り導来深谷圏を指すものとする。

研究費の申請を行った当時はリュウヴィル多様体の張り合わせに関する巻(wrapped)深谷圏の振る舞いが知られていなかった。したがって境界連結和という特別な場合に限って詳しく調べる事を目標として掲げたが、この問題は 2018 年に始まるガナトラ-パードン-シェンデの一連の論文によって、より原理的に解決される事となった。したがって当初の研究計画を変更し、申請者の研究領域であるトーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性に立ち戻って研究を進める事とした。

トーリック多様体のミラーはポテンシャル関数付きの開ケーラー多様体であり、ランダウ-ギンツブルグ模型と呼ばれる。このミラー対のどちら側で A ツイスト/B ツイストを考えるかにより 2 通りのホモロジー的ミラー対称性予想が得られる。トーリック多様体を B 模型側とした場合の予想は、トーリック多様体の接続層の導来圏とランダウ-ギンツブルグ模型の深谷ザイデル(Seidel)圏の三角同値であり、これは申請者が植田一石氏と共に研究し、幾つかの基本的な場合に証明を与えたものである。一方でトーリック多様体を A 模型側とした場合の予想のひとつの形は、トーリック多様体の $Z/2Z$ 次数付深谷圏とランダウ-ギンツブルグ模型の行列因子化圏が同値になるというものであり、深谷-呉-太田-小野の研究により理解が大きく進展していた。

2. 研究の目的

研究の目的は、トーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性を、大きく分けて二つの観点から調べる事である。

ひとつはトーリック多様体を B 模型側とするホモロジー的ミラー対称性予想を、ストロミンジャー-ヤウ-ザスロウ(SYZ)ファイブレーションの立場から再検討する事である。多くのホモロジー的ミラー対称性の証明においては、ミラー対の三角圏の間のミラー関手は、三角圏の構造から妥当そうな対象の対応を作る事で構成しており(たとえば各々で生成対象を計算し、それらの間の射の構造を見て対応を作るなど) ややアドホックな理解に留まっている。一方で SYZ ファイブレーションを介すると、ミラー関手は族のフレアー-ホモロジーを利用してより原理的に構成される。この描像を補助として、直線束とラグランジュ切断の対応を具体的に理解する事が目的である。

もうひとつはトーリック多様体を A 模型側とするミラー対応について、同変ホモロジー的ミラー対称性の理解を進める事である。深谷-呉-太田-小野はトーリック多様体のラグランジアン-トラスのフレアー A 無限大代数を定義し、その曲率項の与えるポテンシャルが(物理的考察によらずに)堀-ヴァファミラーを復元する事と、フレアーコホモロジーの計算を行った。この結果から前節の最後で述べた形のホモロジー的ミラー対称性予想は、圏同値というレベルでは事実上解決されていると言ってよい。一方で同変版については、ギヴェンタルによる同変ミラーランダウ-ギンツブルグ模型の計算はあるものの同変深谷圏の構成方法自体が知られていない。したがって定式化レベルから同変版を調べるのが目的である。こちらについては継続中の課題に引き継いでいる事から、以下ではやや簡潔に触れる。

3. 研究の方法

SYZ ファイブレーションとはミラー対に、その半次元の実多様体上の、互いに双対なトラスファイブレーションの構造を入れたものである。

SYZ ファイブレーションは元々カラビ-ヤウ多様体のミラー対に対し提唱されたものであるが、特異ファイバーが不可避免的に存在するため、構成やホモロジー的ミラー対称性との関わりについては未解明の部分が多い。トーリック多様体の場合、ファイブレーションはトラス作用に関する運動量写像とするのが自然である。その場合運動量多面体の境界へ向けてトラスファ

ファイバーが退化する(すなわちトーリック因子上で特異ファイバーを持つ)が、これはカラビ・ヤウ多様体の場合に予想される余次元 2 (以上)の特異ファイバーと比べて遥かに簡単な構造を持つことから、解析がより容易であると期待される。

一方で運動量多面体の整アフィン構造を用いると運動量写像の双対トーラスファイブレーションを構成する事ができ、これがランダウ・ギンツブルグ模型を与える。(運動量多面体の境界上で双対トーラスが半径が発散し、これが全空間の無限遠方向に対応する。)

トーリック多様体からトーリック因子を除いた多様体上の正則直線束のミラーは、族のフレアーホモロジーにより双対トーラスファイブレーションのラグランジュ切断になると期待される。またトーリック多様体上の接続層の導来圏が、これらの正則直線束であって、トーリック因子上に延びるもののなす DG 圏と同値になる場合がある事が知られている。

一方で整アフィン構造に付随する、底空間の余接束を格子で割って得られる非特異なトーラスファイブレーションに対し、その完全ラグランジュ切断のなす深谷圏は、底空間のモースホモトピー圏と同値になる事が期待される(余接束の深谷圏を底空間のモースホモトピー圏で記述する深谷-呉の結果の応用として、コンツェヴィッチ-ソイベルマンが提唱したもの)。これをトーリック多様体の運動量写像の双対トーラスファイブレーションという、比較的扱いやすい特異ファイバーのある場合に拡張する。この路線ではアブザイドによる一般的な結果があるが設定が異なっており、我々はルン-ヤウ-ザスロウやチャンによる SYZ 描像下での正則直線束に関する研究から示唆を得て、ミラー関手のより具体的な表示を与える事を目的とした。

同変ホモロジー的ミラー対称性に関しては、まずトーリック多様体のトーラス同変ラグランジュ部分多様体について、同変フレアー A 無限大代数を定義する必要がある。このために同変コホモロジーのモデルが必要であるが、我々はリー環上の微分空間(differential space)とそれに付随するカルタン模型の概念を、この状況に当て嵌まるように一般化する事とした。得られた同変深谷圏の曲率項として計算される同変ポテンシャル関数は対数項を含む(したがって 1 価関数ではない)が、離散的な特異点を持つので、行列因子化圏を「局所的に」定義する事ができる。

4. 研究成果

SYZ ファイブレーションとモースホモトピーによるトーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性について：梶浦宏成氏(千葉大学)と共同で、射影空間とその直積、および次数 1 のヒルツェブルフ曲面 F_1 の場合に SYZ ファイブレーションによって得られるトーリック Fano 多様体のミラーランダウ・ギンツブルグ模型のモースホモトピー圏を定義・計算し、これがトーリック因子上に延びる正則直線束の DG 圏と圏同値になる事を示した(ホモロジー的ミラー対称性)。これらの成果は 2 篇の論文に纏め、出版した[二木-梶浦 2022, 2024]。

具体的には、ミラー関手に対応するラグランジュ切断が簡明な形をもつ正則直線束の表示を発見した事が鍵となった。また前述の通り特異ファイバーがある場合のモースホモトピー圏について、ファイバーの半径が発散する運動量多面体の境界上でのラグランジュ切断の交差も適切に数えてコホモロジーの生成元とする必要があるが、この部分の構成も鍵である。この研究はトーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性により具体的な理解を与えた。その後梶浦氏の学生である中西隼斗氏および西田安寿菜氏により拡張され、さらに研究が進んでいる。

同変ホモロジー的ミラー対称性について：三田史彦氏(学習院大学)と共同で、リー環上の微分空間の概念を曲率項付きの A 無限大圏に拡張した。それを用いてコンパクト連結リー群作用のあるシンプレクティック多様体の同変深谷圏の定式化を提案し、複素 1 次元の場合、すなわち 1 次元複素射影空間 CP^1 および複素平面 C の場合に構成した。この曲率項を計算するとギヴェンタルの同変ランダウ・ギンツブルグミラーポテンシャルと一致する事を見、(A 無限大圏としての)同変深谷圏から行列因子化圏へのミラー関手を構成して、これがコホモロジー的充滿忠実になる事を証明した(同変ホモロジー的ミラー対称性)。

なお非同変な場合は CP^1 の深谷圏の非自明な対象はひとつのラグランジアントーラスの上に集中しているが、同変化すると同変同変パラメーターの付値により複数のラグランジアントーラスに分裂する事がある。また C の深谷圏は非自明な対象を持たないが、同変化する事で非自明な対象が現れる。これは同変化により現れる現象である。以上の結果を論文に纏め、出版した[二木-三田 2023]。

関連して、指導学生の岩畑竜玄氏が、旗多様体の同変ポテンシャル関数を計算した事にも言及しておきたい(2023 年度千葉大学修士論文)。証明は旗多様体のポテンシャル関数を計算した西納-野原-植田の議論の援用による。この結果は、よいトーリック退化をもつ多様体の場合にもホモロジー的ミラー対称性が成り立つ可能性を示唆するものである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Futaki Masahiro, Kajiura Hiroshige	4. 巻 62
2. 論文標題 Homological mirror symmetry of CPh and their products via Morse homotopy	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 032307 ~ 032307
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/5.0029165	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Futaki Masahiro, Kajiura Hiroshige	4. 巻 26
2. 論文標題 Homological mirror symmetry of \mathbb{F}_1 via Morse homotopy	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Advances in Theoretical and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 2611 ~ 2637
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/ATMP.2022.v26.n8.a5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Futaki Masahiro, Sanda Fumihiko	4. 巻 192
2. 論文標題 Equivariant homological mirror symmetry for C and CP1	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 104929 ~ 104929
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2023.104929	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 Equivariant Homological Mirror Symmetry for CP^1
3. 学会等名 BU-Keio-Tsinghua Workshop 2022 Geometry and Mathematical Physics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 Equivariant Homological Mirror Symmetry for CP^1
3. 学会等名 IBS-CGP Symplectic Monday Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 Equivariant Homological Mirror Symmetry for CP^1
3. 学会等名 Mirror Symmetry and Related Topics, Kyoto 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 二木昌宏, 三田史彦
2. 発表標題 1次元射影空間に対する同変ホモロジー的ミラー対称性
3. 学会等名 日本数学会年会 幾何学分会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 二木昌宏、梶浦宏成
2. 発表標題 モースホモトピーと射影空間に対するホモロジー的ミラー対称性
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 Equivariant homological mirror symmetry and partially wrapped Fukaya category
3. 学会等名 RMS & IBS-CGP Joint Workshop, RIMS, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 Homological mirror symmetry for the projective space and an equivariant version
3. 学会等名 Mirror Symmetry and Related Topics 2019, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 Coamoeba, dimer models and HMS in dimension 2
3. 学会等名 Tropical Geometry and Mirror Symmetry, The University of Melbourne (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 Introduction to the Fukaya-Seidel category and homological mirror symmetry for singularities
3. 学会等名 Workshop on Singularities and Symplectic Geometry, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masahiro Futaki
2. 発表標題 A Thom-Sebastiani type theorem for Fukaya-Seidel categories
3. 学会等名 Mini workshop on Symplectic geometry and Mirror symmetry, Seoul National University
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
Aspects of Mirror Symmetry in Chiba 2019	2019年 ~ 2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関