

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03274

研究課題名(和文)量子トロイダル代数に付随する差分方程式とハイパーケーラー商

研究課題名(英文) Difference equations associated with quantum toroidal algebra and hyper-Kaehler quotient

研究代表者

菅野 浩明 (Kanno, Hiroaki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：90211870

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)： $gl_1$ 型の量子トロイダル代数の絡作用素の相関関数および積のトレースが満たす KZ 型の差分方程式を導いた。さらに、その解の構造を研究し、楕円型 Nekrasov 分配関数との関係を示した。面欠陥が入った K 理論的 Nekrasov 分配関数を変形 Virasoro 代数の共形ブロックとみなして導かれた非定常差分方程式が、ゲージ変換により量子化された VI 型離散パインヴェ方程式となることを示した。この差分方程式の背後にあるモジュライ空間はアフィン Laumon 空間であり、ケーラー商となっている。この意味で、研究開始当初、想定していた差分方程式とは異なる新しいクラスの差分方程式である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

$gl_1$ 型の量子トロイダル代数の絡作用素に対する KZ 型の差分方程式の導出法について、かなり一般的な処方箋を確立することができた。これは、インスタントン分配関数が満たす量子 KZ 方程式との関係を明らかにする上で技術的に重要になると期待される。そのためには、今後、遮蔽作用素の役割を明らかにしていく必要がある。アフィン Laumon 空間が背後にある非定常差分方程式は、研究の開始当初には想定されていなかった新しいクラスの差分方程式である。量子トロイダル代数との関係を明らかにすることは今後の課題である。

研究成果の概要(英文)：We have derived difference equations of KZ type for the correlation functions or the trace of the products of intertwining operators of the quantum toroidal algebra of type  $gl_1$ . We also investigated the structure of solutions and clarified the relation to the Nekrasov partition function of elliptic type. We have investigated the non-stationary difference equation for the K-theoretic Nekrasov partition function with a surface defect, which we can regard as a conformal block of the deformed Virasoro algebra. We have proved that by gauge transformation the equation is transformed to a quantized version of discrete Painleve VI equation. The underlying moduli space is the affine Laumon space, which is only Kaehler quotient. In this sense this equation belongs to a new class of difference equations which was not expected in the beginning of the project.

研究分野：数理物理学

キーワード：量子トロイダル代数 量子可積分系 超対称ゲージ理論

## 1. 研究開始当初の背景

2009年に Alday-Gaiotto-Tachikawa は、ゲージ理論のインスタントンの”数え上げ”から定義される母関数 (Nekrasov 分配関数) と 2次元共形場理論の共形ブロックの関係を提唱した。これを AGT 対応という。AGT 対応におけるインスタントンのモジュライ空間は、中島による簾多様体の基本的かつ重要な例となっているが、簾多様体は一般にハイパーケーラー商として実現することができる。Nekrasov 分配関数は、このモジュライ空間上のトーラス作用に関する同変積分として定義される。その後 AGT 対応を数学的に証明する試みを通して Maulik-Okounkov, Schiffmann-Vasserot, Braverman-Finkelberg-Nakajima 等は AGT 対応の背後にある、モジュライ空間の同変 (交叉) コホモロジー環に作用する量子群あるいは二重アフィンヘッケ代数の存在を明らかにした。したがって AGT 対応が共形ブロックにまつわる予想であることを考慮すれば Maulik-Okounkov らの研究に現れた量子群対称性の表現の絡作用素に関する差分方程式を考え、その解を共形ブロックの類似と見なして Nekrasov 分配関数やその一般化である数え上げ量子不変量 (ドナルドソン・トーマス型の不変量や結び目や絡み目の圏論的不変量) の母関数との関係を解明することは自然な問題である。我々は量子群として量子トロイダル代数に着目し、ゲージ理論のモジュライ空間をハイパーケーラー商として実現することにより現れる簾多様体の数え上げ不変量が KZ 型差分方程式の解にどのように反映されるかという問いを研究する。

## 2. 研究の目的

AGT 対応と呼ばれる 4次元ゲージ理論のインスタントンの数え上げから定義される Nekrasov 分配関数と 2次元共形場理論の共形ブロックの対応を見据えて、量子トロイダル代数の表現の絡作用素の相関関数を主な研究対象とする。相関関数が満たす KZ 型差分方程式が、インスタントンのモジュライ空間の同変 K 理論を用いて定義される数え上げ量子不変量の母関数を特徴付けることを示すことが研究目的である。

ゲージ理論に関わるモジュライ空間の多くは、ハイパーケーラー商として実現され、一般に簾多様体と呼ばれている。これは幾何学的表現論における旗多様体の余接束の類似とみなすことができる。一般に量子トロイダル代数に関する KZ 型差分方程式の解として定義した共形ブロックが、簾多様体として実現されたモジュライ空間に関わる数え上げ量子不変量の母関数を与えることを示すことを目標とする。

## 3. 研究の方法

Maulik-Okounkov は、ヤンギアン代数が簾多様体の同変コホモロジー環へ作用する事実に基づき幾何学的 R 行列を導入しているが、このヤンギアン代数は量子トロイダル代数の極限として得られる。我々が研究対象とする差分方程式にも量子トロイダル代数の R 行列が現れるが、これは量子トロイダル代数の絡み作用素の交換関係 (モノドロミー) から定義されるものである。この両者の一致を確かめる (一致しない場合は関係を見つける) ことで、差分方程式の解が簾多様体の同変 K 理論の幾何学的 R 行列について、どのような情報を与えるか解明する。量子 KZ 方程式については、量子アファイン代数を楕円型に拡張することで対応する楕円型差分方程式が知られている。これは絡み作用素の合成の行列要素の代わりに (適切な) 表現空間上のトレースに対する差分方程式である。楕円型差分方程式の解のモノドロミーは  $SL(3, \mathbb{Z})$  モジュラー対称性やある種の双対性といった興味深い性質をもつことが知られている。量子トロイダル代数に関して、同様の拡張を試みて解のモジュラー対称性や双対性を明らかにする。これは楕円型可積分系とも深く関わる問題であるため、その専門家と研究交流も行う。

期間の後半では簾多様体の幾何学に関わるより一般の KZ 型差分方程式の研究を目指す。この際、問題となるのは差分方程式の解がどのような数え上げ不変量に対応するかという点である。その手掛かりとして Okounkov-Smirnov あるいは Aganagic-Frenkel-Okounkov らが最近導入した KZ 型差分方程式を参考とする。彼らが導いた KZ 型差分方程式は、我々が考える量子トロイダル代数に付随する差分方程式に比べ、ケーラー構造に由来するパラメータを余分に含んでいる。これは我々が簾多様体上の超対称量子力学を考えているのに対し、彼らは有理曲線上の超対称シグマ模型に相当する理論を考えているためであると予想している。この予想を確かめると共に、ケーラーパラメータの役割に注目して簾多様体の数え上げ不変量に関するより精密な情報を探る。

#### 4. 研究成果

- (1)  $A_0$  型の量子トロイダル代数 (Ding-庵原-三木代数) の MacMahon 表現に対する絡作用素を構成し, その交換関係によって定義される  $R$  行列を計算した. さらに絡作用素の相関関数が満たす KZ 型の差分方程式を導いた.  $R$  行列が“対角”化されているため, この差分方程式の解は 2 点相関関数の積に因子化される. この 2 点関数は, 2 つの平面分割でラベルされており, 分割の組でラベルされる Nekrasov 分配関数の構成要素を拡張したものになっている.
- (2) 複素 Chern-Simons 理論の正準量子化から導かれる  $U(1)$  同変な変形 Verlinde 代数と 4 次元超共形場理論の超共形指数の関係について次のような結果を得た. 変形 Verlinde 代数が Hall-Littlewood 代数のある特殊化で記述できることに着目して, 特殊化を与えるイデアルの生成関係式を求め, 対応する 2 次元位相的分配関数を計算した. ゲージ群のランク及びレベルが低い場合は, 4 次元超共形場理論の超共形指数に関する既知の結果と一致することが確認できた.
- (3) 白石潤一氏によって提唱された非定常 Ruijsenaars 関数が 2 重楕円型量子可積分系のハミルトニアン固有関数と同定できるか検討した. 2 重楕円型量子可積分系が 6 次元超対称ゲージ理論の楕円コンパクト化に付随するという視点から遮蔽作用素の構造を研究した. 残念ながら, この予想は一般的には成立しないことが分かったが, 副産物としてアフィン Laumon 空間の楕円種数の計算に対応する新しいタイプの楕円型対称多項式族を発見した.
- (4) Ding-庵原-三木代数に対して準 Hopf ツイストと呼ばれる余積構造の捨りを行ない, 楕円型変形を与えた. 対応する絡作用素の構成を行い, 絡作用素の積 (合成) のトレースに関する KZ 型の差分方程式を導いた. この方程式の解として 6 次元超対称ゲージ理論の分配関数の基本的構成要素である楕円型の Nekrasov 因子が得られることを確かめた.
- (5) 4 次元ゲージ場に対する反自己双対 Yang-Mills 方程式に等価な Yang 方程式を与える理論として 4 次元ケーラー Wess-Zimino-Witten 模型が知られている. これは 4 次元非線形シグマ模型に Wess-Zumino 項を加えた理論であり, 2 次元共形場理論の基本的な例である Wess-Zumino-Witten 模型の高次元化となっている. また 4 次元計量の符号が双曲型るとき,  $N=2$  超対称開弦の弦の場の理論の作用となることが指摘されている. この  $N=2$  超対称開弦理論への応用を念頭に, 最近, 発見された 4 次元ケーラー Wess-Zimino-Witten 模型のソリトンの古典解について 1-ソリトンの作用密度を計算し, 確かに余次元 1 の平面に局在していることを確認した. また対応する  $n$ -ソリトン解について作用密度の漸近的振る舞いを調べて, 位相のずれを伴うという意味で 1-ソリトン解の非線形な重ね合わせとみなせることを示した.
- (6) 変形 Virasoro 代数の共形ブロックに対する差分方程式として S. Shakirov 氏によって提唱された非定常差分方程式が, 適切なゲージ変換により量子化された VI 型離散パンルヴェ方程式とみなせることを示した. この差分方程式の背後にある幾何学は アフィン Laumon 空間であり, これはハイパーケーラー商ではなくケーラー商となっている. この意味で, S. Shakirov 氏による非定常差分方程式は, 当初, 想定していた差分方程式とは異なる新しいクラスの差分方程式となっている. アフィン Laumon 空間が背後にあることは量子アフィン代数の共形場ブロックとの関係が期待される. 実際, 最近の研究で量子 KZ 方程式との関係が明らかになりつつある. 量子トロイダル代数との関係を明らかにすることことは今後の課題である.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 13件）

1. 著者名 H.Awata, K.Hasegawa, H.Kanno, R.Ohkawa, Sh.Shakirov, J.Shiraishi and Y.Yamada :	4. 巻 19
2. 論文標題 Non-stationary difference equation and affine Laumon space, Quantization of discrete Painleve equation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2023.089	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 M.Hamanaka, S.-C.Huang and H.Kanno	4. 巻 2023
2. 論文標題 Solitons in Open N=2 String Theory	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/ptep/ptad037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 P.Cheewaphutthisakun and H.Kanno	4. 巻 2104
2. 論文標題 MacMahon KZ equation for Ding-Iohara-Miki algebra	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP04(2021)031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 P.Cheewaphutthisakun and H.Kanno	4. 巻 2112
2. 論文標題 Quasi-Hopf twist and Elliptic Nekrasov factor	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 130
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP12(2021)130	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei	4. 巻 2020
2. 論文標題 On a complete solution of the quantum Dell system	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP04(2020)212	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei	4. 巻 80
2. 論文標題 Shiraishi functor and non-Kerov deformation of Macdonald polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The European Physical Journal C	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1140/epjc/s10052-020-08540-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kanno Hiroaki	4. 巻 2020
2. 論文標題 Quiver matrix model of ADHM type and BPS state counting in diverse dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/ptep/ptaa079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei	4. 巻 2020
2. 論文標題 Elliptic lift of the Shiraishi function as a non-stationary double-elliptic function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP08(2020)150	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 H.Awata, H.Kanno, A.Mironov and A.Morozov :	4. 巻 949
2. 論文標題 Can tangle calculus be applicable to hyperpolynomials?	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nucl. Phys.	6. 最初と最後の頁 114816
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2019.114816	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 H.Awata, H.Kanno, A.Mironov and A.Morozov :	4. 巻 2004
2. 論文標題 On a complete solution of the quantum Dell system	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 212
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP04(2020)212	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 H.Awata, H.Kanno, A.Mironov, A.Morozov and An.Morozov	4. 巻 D 98
2. 論文標題 A non-torus link from topological vertex	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Physical Review	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevD.98.046018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 H.Kanno, K.Sugiyama and Y.Yoshida	4. 巻 2
2. 論文標題 Equivariant U(N) Verlinde algebra from Bethe/Gauge correspondence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP02(2019)097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H.Awata, H.Kanno, A.Mironov, A.Morozov, K.Suetake and Y.Zenkevich	4. 巻 4
2. 論文標題 The MacMahon R-matrix	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP04(2019)097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計7件(うち招待講演 6件/うち国際学会 6件)

1. 発表者名 H.Kanno
2. 発表標題 Shakirov's non-stationary difference equation and five dimensional instanton counting with a defect
3. 学会等名 XIII Workshop Geometric Correspondences of Gauge Theories (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 H. Kanno
2. 発表標題 Elliptic genus of the affine Laumon space and a non-Kerov deformation of the Macdonald polynomials
3. 学会等名 Integrable Systems and Symmetric Functions, School of Mathematics and Statistics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 H. Kanno
2. 発表標題 K theoretic instanton counting with a defect and qq-Painlev'e VI equation
3. 学会等名 Quantum Field Theories and Representation Theory (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 H.Kanno
2. 発表標題 Super-integrability and BPS state counting in diverse dimensions
3. 学会等名 Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 菅野浩明
2. 発表標題 Plane partitions and BPS state counting in diverse dimensions
3. 学会等名 素粒子論と数理論物理学 -- 江口-Hanson 解の発見から 40 年 -- (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroaki Kanno
2. 発表標題 Equivariant Verlinde algebra and the Hall-Littlewood polynomials
3. 学会等名 Topological field theories, String Theory and Matrix Models (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroaki Kanno
2. 発表標題 3d holomorphic blocks from the intertwiner of quantum toroidal algebra
3. 学会等名 Representation theory, gauge theory and integrable systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ロシア連邦	ITEP	Lebedev Institute		