

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：34310

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03276

研究課題名（和文）部分双曲力学系の野性的挙動と滑らかさ

研究課題名（英文）wild behavior of partially hyperbolic dynamics and its smoothness

研究代表者

浅岡 正幸（Asaoka, Masayuki）

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号：10314832

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：部分双曲力学系やホモクリニック接触を持つ可微分力学系の野性的な振舞いについて、高階微分可能性や高階微分の情報が本質的な役割を果たす新しい例を発見した、その過程で高次元においてはカントール集合の組がC1安定交差を持ちうることを示すことが出来た。これは数直線上のカントール集合の組はC1安定交差を持ち得ないという事実と鋭い対比をなす結果である。また、位相推移的な3次元アノソフ流のR-coveredという性質をアノソフ流のBirkhoff切断の位相的な性質で特徴づけることもできた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

双曲性を初めとして、力学系の位相的な性質は主にその1階微分と関係づけられることが多かったが、本研究において高階微分が力学系の周期点の数の増大度という位相的な性質が2階、3階微分と密接に関係することが明らかになった。また、0次元の集合であるカントール集合が摂動しても交わり続けると安定交差という性質は、力学系の分岐理論においてこれまでも重要な役割を果たしてきたが、本研究ではこれまで知られていたものとは全く異なるメカニズムによる安定交差の例が構成され、その分岐理論への応用がなされた。3次元アノソフ流のR-covered性の特徴づけもアノソフ流の位相的性質の理解への応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：We found new examples which exhibit wild dynamical behaviors in partially hyperbolic dynamics and homoclinic tangency. In the mechanism generating wild behavior, higher differentiability and information of higher differential plays important roles. In the route to find such examples, we also found a pair of Cantor sets in higher dimension which exhibits C1-stable intersection. It is contrast to the one-dimensional case where no pair of Cantor sets exhibits C1-stable intersection. We also characterized R-coveredness of a three-dimensional topologically transitive Anosov flow by topological information of its Birkhoff section.

研究分野：力学系理論

キーワード：部分双曲力学系 分岐理論

## 1. 研究開始当初の背景

多様体上の微分同相写像の反復合成, または, 流れが長い時間でどのような挙動を示すかを知ることが力学系理論の究極の目標の一つである. 現代的な力学系理論の創始者の一人である S.Smale は双曲力学系と呼ばれるよい振舞いをする系が力学系全体の空間において通有的であることを予想したが, Smale 自身や Newhouse などによってこの予想は否定され, ホモクリニック接触と呼ばれる双曲性と背反する現象が生じている系が稠密にあることが明らかになった. その後, ありうるすべての局所的なダイナミクスを近似的に実現する「普遍力学系」と呼ばれる系や, 軌道に沿った分布が一定の確率分布に収束しない「歴史的挙動」を持つ点が豊富にある系などのほとんど統制の効かない「野性的」なダイナミクスを持つ系が一定の自然な条件のもとでホモクリニック接触からの分岐によって生じることが明らかになった. 一方で, ホモクリニック接触から離れたところにある部分双曲力学系と呼ばれる弱い双曲性を持つ力学系においては, 物理測度の存在やその個数の有限性などの双曲力学系で成り立つ性質がいくつかの条件の下では成り立つこともわかってきた. このような状況の下で, 本研究の代表者浅岡は篠原, Turaev らとの共同研究において, 部分双曲力学系の本質的な部分を抽出したあるトイモデルにおいて, 周期点の数の超指数的な増大という双曲力学系では起き得ない現象が起き得ること, また, この現象を生み出すメカニズムは系の高階微分の情報に繊細に依存することなどを明らかにした. この共同研究の成果から, 浅岡は部分双曲力学系においても野性的な振舞いは起き得るのか, また起き得る場合には, それが系の高階微分の情報とどのように関係するかという問題にたどり着いた. 一方, 以前の研究で浅岡は 2 次元実解析的力学系で周期点の数が超指数的に増大する系を構成したが, すべての 1 次元実解析的力学系では周期点の数の増大度は高々指数的事であることが古典的に知られていた. このことから, 1 次元と高次元の中間的な性質を併せ持つ反復写像系や中立的な方向が 1 次元の部分双曲系について, 野性的な振舞いをする系の存在が否か問題となっていた.

力学系の分岐と高階微分の関係については, 古典的な周期点の分岐理論においても高階微分に関する条件が現れるなど, 高階微分の情報が重要となる場合が多い一方で,  $C^r$ -closing lemma と呼ばれる  $C^r$  級摂動に関する主張が  $r=1$  の場合しか証明がなされていないために, 通有的な力学系の性質に関しては  $C^1$  級以外の場合にはわかっていることは非常に少なかった. そのような状況が長らく続いていたが, 2010 年代後半に浅岡は入江とともに 2 次元ハミルトン微分同相写像については  $C^1$ -closing lemma が成り立つことを証明した. しかし, その証明では embedded contact homology と呼ばれる不変量に関する 3 次元 Siberg-Witten 理論に由来する諸結果が必要となる. そのため, この結果を力学系理論の言語で理解し直すことがより一般の状況での closing lemma の証明には必要であると考えられた.

## 2. 研究の目的

上で見たように, 浅岡と篠原, Turaev の共同研究が示唆するように, ホモクリニック接触から離れていても通有的な力学系が野性的な振舞いをする事が起こりうる. また, ある系が野性的な振舞いをするか否かが系の高階微分の情報に左右される場合もある. では, 野性的な振舞いを示す系とそうでない穏やかな振舞いを示す系の境界はどこにあるのか, そしてその境界に関して高階微分はどのような役割を果たしているのか, という問いが本研究の核心である. この問いを出発点として, 本研究では次の 3 つの研究目的を設定した.

- (1) 野性的挙動を示す系の豊富な存在, もしくは非存在を示し, それらと部分双曲性, もしくはホモクリニック接触の関係を調べること.
- (2) 野性的挙動の存在, 非存在と系の高階高階微分可能性や高階微分の情報の関連を調べること.
- (3) 高い微分可能性を持つ系の分岐現象を調べるツールとしての  $C^r$  摂動の技術の開発

それぞれの目的をより具体的に述べるならば, 以下ようになる:

力学系が示しうる野性的挙動として, 本研究では周期点の超指数的な増大と歴史的挙動を示す軌道の豊富な存在や, 普遍力学系を主に扱うことにした. これらの野性的挙動が部分双曲力学系でも起きうるのか, そうであればそのメカニズムはホモクリニック接触によるものとはどう異なるのかを理解することを目指すのが(1)である. (2)では, 反復写像系や中立的な方向が 1 次元の部分双曲力学系が実解析であるときに野性的な振舞いが生じうるかどうかを見極めることを一つの目標とする一方で, また有限階の微分可能性を持つ場合についても, 多くの研究がなされてきた  $C^1$ -通有的な力学系の性質とは異なる  $C^r$ -位相( $r>1$ )で初めて観測されるような野性的性質があるか, またそれがあつ場合にはどのようなメカニズムに依るのかを探ることも目標とした. (3)では, 2 次元ハミルトン微分同相写像に対して証明された  $C^1$ -closing lemma をより深く理解するために, 2 次元面積保存微分同相写像の場合に拡張することが最初の目標であり, そこで得られた知見をもとにこれらの closing lemma のより力学系理論的な理解を最終的な目標とした.

### 3. 研究の方法

部分双曲力学系の穏やかな振舞いに関してはすでに多くの結果がある。部分双曲力学系で起こりうる野性的な挙動の可能性を探る上でこれらの基本的な結果を精査し、振舞いの穏やかさを導くメカニズムをよく理解することは研究を始めるに当たって必須であった。そのため、本研究の初期ではそのような知られている結果の精査と理解に重点を置いた。また、部分双曲性を持つ力学系において野性的な挙動を引き起こす blender と呼ばれるメカニズムは浅岡と篠原、Turaev の共同研究においても重要な役割を果たしていた。Barrientos と Raibekas はそのグラスマン束への持ち上げが blender を持つような  $C^2$  級力学系構成することで余次元の高いホモクリニック接触が  $C^2$  局所通有であることを証明していたが、彼らの証明では高次元における普遍力学系の局所通有性の証明への糸口となると考えられる余次元が最も高いホモクリニック接触の局所通有性は示すことができなかった。そこで、この問題を高次元ユークリッド空間におけるコントロール集合の安定交差の問題と捉え直すことで、問題の解決に取り組んだ。

実解析的の反復写像系における野性的な挙動の存在に関しては、主に周期点の数の超指数的な増大が起き得るかという問題を中心に研究を行った。滑らかな場合については、浅岡による 2 次元実解析的の面積保存微分同相写像における周期点の数の超指数的な増大を持つ例の構成から示唆を得た Berger の方法により、浅岡、篠原、Turaev によるものとは異なった方法によって反復写像系の場合の周期点の数の超指数的な増大を持つものが構成できるため、その実解析的な類推が可能かどうかについて調べた。その一方で、実解析的な反復写像系については、1 つの写像の反復と同様に周期点の増大度が高々指数的となる可能性も捨てきれないので、その証明の可能性も探った。

Closing lemma のより広い写像のクラスへの拡張と力学系の側からの理解に関しては、まず、最も簡単と思われる 2 次元トーラス上の面積保存写像の場合を調べ、その後、その知見をもとに一般の閉曲面上の面積保存写像の場合の証明を目指す方針を取った。また、入江との共同研究において用いた 2 次元面積保存微分同相写像に関する問題を 3 次元接触多様体の Reeb 流の問題に翻訳する手法は、位相推移的な 3 次元アノソフ流が接触アノソフ流と位相同値であることの Recovered という性質による特徴づけの問題へ応用できる可能性があることに気づいたため、closing lemma に関する研究と並行して、この問題にも取り組んだ。

### 4. 研究成果

篠原、Turaev らとの共同研究で示していた、反復写像系における周期点の数の超指数的な増大に関する結果の類推を中立的な方向が 1 次元の部分双曲力学系に対して示すことが出来た。反復写像系は中心方向が 1 次元の部分双曲力学系の Toy Model とみなすことができ、反復写像系における議論の多くはそのまま部分双曲系に移植できるが、この問題の場合は中立的な方向の「向き」を適切に定義する必要があるなどの特有の困難があったが、それらを解決することで反復写像系の場合と同様の結果を証明することが出来た。この結果の帰結として、ある力学系の周りで  $C^1$  通有的には周期点の数の超指数的な増大は起きるが、 $C^{r+1}$  通有的にはそうでないといった現象が  $r=1, 2$  に対して観測されることがわかり、部分双曲系の位相的な分岐現象が高階微分可能性に強く依存することがあることが明らかになった。

力学系の野性的な振舞いと高階微分可能性の関係に関するもう一つの結果としては、Barrientos と Raibekas が将来の課題としていた最大余次元のホモクリニック接触の  $C^2$  局所通有性を証明することができた。この結果は Barrientos と Raibekas による方法を用いて  $C^2$  力学系のグラスマン束への持ち上げに 2 つの blender を構成し、それらが定めるコントロール不変集合の安定集合と不安定集合が安定交差を持つことを示すことで証明された。その証明においては blender が定める 2 つのコントロール集合がそれが位相的には 0 次元であるにも関わらず、横断的な交わりを持つ正の次元の多様体であるかのように振る舞うことを観察することが鍵となる。この 2 つのコントロール集合の交差はコントロール集合を定める反復写像系の  $C^1$  位相の摂動に対して安定的であり、Moreira によって示されていた数直線上のコントロール集合の  $C^1$  位相に関する安定交差の非存在とは対照的な結果となっている。また、これまでに知られている高次元空間におけるコントロール集合の安定交差に関する結果は、コントロール集合を定義する反復写像系が共形的で 1 次元のコントロール集合に関する Newhouse の結果の類推を用いるものがほぼすべてであったが、この研究で得られた安定交差を許す例は共形的からほど遠いものであり、これまでの研究の方向とは一線を画している。このように、証明の鍵となったコントロール集合の安定交差に関する結果は、コントロール集合の安定交差に関する部分自体もホモクリニック接触の文脈とは独立に非常に興味深いものである。この結果の証明においてはグラスマン束への持ち上げが  $C^1$  級であることが本質的に重要であり、同様の結果を  $C^1$  微分同相写像に対して示すことは難しいと思われる。なお、この最大余次元のホモクリニック接触の局所通有性を用いて、高次元における普遍力学系の局所通有性の証明を目指したが、計算の複雑さから来る難しさを解決するに至らず、その証明は今後の課題として残された。

実解析的な反復写像系における周期点の数の超指数的な増大の問題に関しては、超指数的な増大を持つ系の存在、非存在の両面から研究を行ったが、いずれも困難にぶつかり問題の解決には至らなかった。

Closing lemma に関わる問題については、2 次元トーラス上の面積保存微分同相写像に対しても  $C$ -closing lemma が成り立つことを証明することが出来たが、論文を執筆中に Qu と Xia に

よってほぼ同じ証明と同じ結果のプレプリントが発表された。その後、一般の閉曲面に対しても  $C$ -closing lemma が成り立つとするプレプリントが Edtmair と Hutchings によってそれぞれ発表された。Edtmair と Hutchings による証明は Embedded contact homology のかわりに Periodic Floer Homology を用いるもので、2次元面積保存力学系を直接調べるものである。彼らの結果の発表後はそこで使われている手法を力学系理論の観点から見直すことで証明を再構成することを目指したが、本研究期間の終了の時点ではまだ道半ばである。

入江との共同研究において用いた2次元面積保存微分同相写像の問題を3次元接触流の問題に置き換える手法の3次元アノソフ流の問題への応用として、位相推移的な3次元アノソフ流が  $R$ -covered という性質を持つことをアノソフ流の Birkhoff 切断の位相的な性質で特徴づけることができた。 $R$ -covered であることを Birkhoff 切断のすべての境界での傾きの符号が正であることで特徴づけるこの結果の帰結として、すべての位相推移的な3次元アノソフ流は周期軌道に沿った Goodman-Fried 手術によって  $R$ -covered にすることができることがわかる。この帰結はこれまで長らく進歩のなかった Fried による古くからの問題「すべての位相推移的な3次元アノソフ流は Goodman-Fried 手術によって古典的なものにするができるか」への足がかりになると期待されると同時に、「 $R$ -covered であることと接触アノソフ流と位相同値であることは同値だろう」という Barbot-Barthelme の予想へのある種の傍証ともなっている。実際、この結果をもとに、最近 Marty は Barbot-Barthelme の予想の解決をプレプリントとして発表している。なお、この  $R$ -covered であることの Birkhoff 切断を用いた特徴づけは、同時期に Marty と Bonatti も独立に証明しており、3人の共著論文として現在までにプレプリントとして発表されている。

入江との共同研究で得た知見のもう一つの応用として、柴田との共同研究で3次元接触多様体上の Reeb 流の正の双曲周期軌道の問題に関する結果を得ることも出来た。問題を Birkhoff 切断上の面積保存写像の正の双曲周期軌道の存在問題に帰着させ、本研究において培った知見と技術を用いて、自然な過程の下で正の双曲周期軌道の存在を示した。Reeb 流における正の双曲周期軌道の存在はその embedded contact homology の構造と密接に関係するため、接触幾何学への今後の応用が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M. Asaoka, K. Shinohara, D. Turaev	4. 巻 157
2. 論文標題 Fast growth of the number of periodic points arising from heterodimensional connections	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Compositio Math.	6. 最初と最後の頁 1899-1963
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/S0010437X21007405	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M. Asaoka	4. 巻 375
2. 論文標題 Stable intersection of Cantor sets in higher dimension and robust homoclinic tangency of the largest codimension	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 873-908
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8452	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 3件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 浅岡 正幸
2. 発表標題 Goodman Fried surgery, Birkhoff sections, and R-covered Anosov flows
3. 学会等名 葉層構造論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 浅岡 正幸
2. 発表標題 Stable intersection of Cantor set
3. 学会等名 第16回代数解析幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 浅岡 正幸
2. 発表標題 Stable intersection of Cantor sets in higher dimensions
3. 学会等名 RIMS研究集会「数理科学の諸問題と力学系理論の新展開」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 浅岡正幸
2. 発表標題 Goodman Fried surgery, Birkhoff sections, and R-covered Anosov flows
3. 学会等名 力学系の理論と諸分野への応用
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 浅岡正幸
2. 発表標題 Goodman Fried surgery, Birkhoff sections, and R-covered Anosov flows
3. 学会等名 接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 浅岡正幸
2. 発表標題 Fast growth of the number of periodic points in low-dimensional dynamics
3. 学会等名 葉層構造と微分同相群2018
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Universite de bourgogne	L'institut Fourier		
英国	Imperial College London			