2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 ４ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１５３０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：１８Ｋ０３２７９

研究課題名（和文）微分空間の枠組みにおけるホモトピー論的手法と解析的手法の融合

研究課題名（英文）Integration of homotopical and analytical methods in the frame work of diffeology

研究代表者

島川　和久（Shimakawa, Kazuhisa）

岡山大学・自然科学研究科・特命教授

研究者番号：７０１０９０８１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：微分空間の圏に，滑らかなホモトピーの概念に基くモデル構造を導入し，それが位相空間の圏のモデル構造とQuillen同値であること示した。また，その過程で現れる「滑らかなセル複体」に対して，ホイットニー近似定理およびホワイトヘッドの定理の類似命題が成り立つことを証明した。次に，一般の微分空間上にシュワルツ超関数と類似の性質を持つ「漸近関数」の代数を構成し，さらに，それを微分空間の間の射（漸近写像とよぶ）の空間へと拡張した。微分空間と漸近写像からなる圏はデカルト閉圏であり，その特質によって，ド・ラームカレントを部分空間として含む「漸近微分形式」の外積代数を一般の微分空間上に構成することが可能となる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
多様体の概念の高度な一般化として，幾何学の分野で注目すべき成果を挙げつつある微分空間の概念と，数理科学のみならず，物理科学や工学等の幅広い分野で重要な役割を果たしているシュワルツ超関数や，その一般化であるコロンボー代数の理論を融合発展させた研究対象を創出することによって，それ自体の理論的興味に留まらず，幅広い科学分野で新たな応用研究の発展推進に貢献することが期待できる。

研究成果の概要（英文）：Based on the notion of smooth homotopy, we introduced on the category of diffeological spaces a model category structure, which turns out to be Quillen equivalent to the standard Quillen model structure on the category of topological spaces. It is proved that there hold analogies to the theorems of Whitney and J. H. C. Whitehead for "smooth cell complexes" associated with the construction of our model category. We then constructed on an arbitrary diffeological space an algebra of generalized functions (called "asymptotic functions") equipped with properties similar to Schwartz distributions, and extended it to a space of morphisms (called "asymptotic maps") between diffeological spaces. The resulting category of diffeological spaces and asymptotic maps is cartesian closed, and is furnished with nice properties enabling us to construct on every diffeological space an exterior algebra containing de Rham currents as its subspace.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：微分空間　モデル圏　シュワルツ超関数　ド・ラームカレント

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景
　微分空間の理論の重要性および有用性は，Iglesias-Zemmour の著書「Diffeology」により国際的に認知され，とくに幾何学的応用の面で注目すべき研究がなされている。しかし，そのホモトピー論的側面に関しては十分に活用されているとは言い難い状況であり，この部分で新たな知見を得ることは，微分空間の理論とその応用の研究に新たな視点をもたらす上で重要である。従来の位相空間の圏においてホモトピー論を展開する際の障害の一つは，位相空間の圏がデカルト閉圏ではないという事実であり，この障害を回避するための手段としてコンパクト生成空間の圏をはじめとする種々の代替圏（コンビニエント・カテゴリー）が提唱されている。島川・吉田・原口は位相空間の圏と微分空間の圏を関連付ける随伴関手対を構成し，それを用いて，位相空間のあるコンビニエント・カテゴリーと，その微分空間の圏への埋込みを構成した。これにより，位相空間のホモトピー論と微分空間のそれとの直接比較が可能となった。さらに，原口・島川は，微分空間の圏においてホモトピー群，フィブレーション，可微分セル複体等の概念を構成することにより，微分空間の圏にキュレン流のモデル構造を導入し，位相空間の圏と微分空間の圏がキュレン同値（Quillen equivalent）であることを証明した。これにより，位相空間の圏で培われたホモトピー論の数々の手法を，微分空間の研究に活用することが可能となった。また，この研究の過程で，微分空間の概念とシュワルツ超関数およびその拡張版であるコロンボー代数の構成方法との驚くべき関連に気付いたことが，本研究計画を構想する契機となった。

２．研究の目的
　代数的位相幾何学で培われたホモトピー論の種々の概念および手法と，関数解析学や微分幾何学で重要な役割を担う微分形式や，その拡張概念であるド・ラームカレントの理論を，微分空間の枠組みにおいて融合発展させた新たな研究手法を確立することが究極的な目標である。このような道具立てを用いることにより，軌道体や階層体などの特異点を許容する複雑な空間や，微分空間の概念が極めて有効に機能する葉層構造や接触構造などの幾何学的構造の研究に対し，より強力な研究手段を提供することが可能となる。具体的な研究目標としては，位相空間の圏と微分空間の圏の随伴関係を拠り所にして，位相空間のホモトピー論と同等の理論体系を微分空間の圏で展開することが第一の目標となる。もう一つの柱となる目標は，微分形式の拡張概念であるド・ラームカレントを，より洗練された形で一般的な微分空間に対して構成することによって，微分幾何学のみならず関数解析学や幾何学的測度論の観点からのアプローチを可能にすることである。これら二つのアプローチを組み合わせることにより，幾何学研究に新たな視点と方法をもたらすことが期待できる。

３．研究の方法
　本研究の方法の特色は，微分空間の圏のモデル構造を明確化し，それを用いて代数的位相幾何学で培われてきたホモトピー論的手法と，ド・ラームカルキュラスに代表される解析的ないし微分幾何学的手法の融合を，組織的かつ一般的な方法で実現する点にある。これは，多様体のコホモロジーに関するド・ラームの定理の現代的な視点からの一般化として捉えることができる。また，微分空間のホモトピー論と解析的な手法を融合させることにより，従来の位相空間のホモトピー論では捕捉し難い幾何学的研究対象である，葉層構造，接触構造あるいは無限次元多様体等の研究に新たな方法をもたらすことが期待できる。
　このような目的を達成するためには，まず，微分空間の圏にホモトピー論を展開するための基本的な仕組みであるモデル構造を導入する必要がある。微分空間は滑らかな多様体の概念の自然な拡張であり，微分空間の間の射である「滑らかな写像」のみではなく，ホモトピーやセル複体の概念の微分空間版である「滑らかなホモトピー」や「滑らかなセル複体」などの概念も，連続性をすべて微分可能性に置き換えることにより，自然な形で定義することができる。これらの新しい概念を用いることによって，位相空間の場合と同様の手順で微分空間の圏にモデル構造を導入し，それが位相空間の圏の標準的モデル構造と本質的に一致する，すなわち，キュレン同値であることを示すことが可能となる。ただし，すべての構成手順が，位相空間の場合と全く同じ論法で進められるわけではなく，得られた微分空間の圏上のモデル構造がコフィブラント生成ではない等，位相空間の場合との違いが幾つか存在する。したがって，上述の命題に詳細な証明を与えるためには特別な工夫が必要となる。
　一方，微分空間の圏は，その構造原理から，多様体上で定義されるシュワルツ超関数やド・ラームカレントの概念を，特異点を許容する一般的な空間上に拡張するための最適な環境であると考えられる。そこで，微分空間の圏を，ユークリッド空間上のシュワルツ超関数を含むように拡張することを試みる。具体的な構成手順は以下のとおりである。まず，各ユークリッド開集合上で Colombeau および Todorov-Vernaeve の方法を組み合わせてコロンボー代数の微分空間版を定義し，次に，それらの断片を微分空間の構造原理に従って貼り合わせることにより，一般的

な微分空間上のコロンボー型一般関数（「漸近関数」とよぶ）の代数を構成する。その際，スカラー，すなわち，１点空間上の漸近関数の全体が非アルキメデス順序体となるように構成を調整しておくことが，その後の展開において重要な意味を持つ。この事実と微分空間の特性が相俟って，ひとたび，一般の微分空間上で漸近関数が構成されると，その構成を任意の微分空間の間の射（「漸近写像」とよぶ）の構成へ拡張すること，および，一般の微分空間上の外積微分代数で，多様体上ではド・ラームカレントの全体を部分ベクトル空間として含むものを構成することは容易である。さらに，そのようにして得られた外積微分代数の各要素を「漸近微分形式」とよぶとき，多様体上の通常の微分形式と滑らかな写像の間に成り立つ相互関係が，漸近微分形式と漸近写像の間にも同様に成り立つことも容易に証明される。

４．研究成果

上で述べた手順を遂行することによって，以下の研究成果を得た。

(1)　微分空間の圏においても滑らかな写像のみを用いてホモトピー集合が定義でき，位相空間と同様に弱ホモトピー同値の概念が導入される。これを基に，微分空間の圏に，位相空間の圏におけるキュレンモデル構造と類似のモデル構造を導入し，両者が本質的に一致する，すなわち，キュレン同値であることを示すことに成功した。また，その証明過程において，滑らかなセル複体のホモトピー論的性質に関する以下の知見を得ることができた。

ホイットニーの近似定理：滑らかなセル複体間の任意の連続写像は滑らかな写像によりホモトピー的に近似することができる。

ホワイトヘッドの定理：滑らかなセル複体間の写像がホモトピー同値写像であるための必要十分条件は，それが弱ホモトピー同値写像である（すなわち，すべての基点に関して，任意の次元のホモトピー群の同形を誘導する）ことである。

特に，ホイットニーの近似定理により，滑らかなセル複体のホモトピー群は位相空間としてのホモトピー群に一致することが分かるので，位相セル複体に対するホイットニーの定理と併せて，滑らかなセル複体間の写像に関する以下の諸条件が互いに同値であることが示される。

(a) 滑らかな写像としてホモトピー同値
(b) 滑らかな写像として弱ホモトピー同値
(c) 連続写像としてホモトピー同値
(d) 連続写像として弱ホモトピー同値

(2)　シュワルツ超関数は，解析学を物理学や工学分野に応用する上で必要不可欠な道具立てであるが，超関数の積が一般的には構成できないという難点を抱えている。この欠陥を解消する手段として，コロンボー代数（Colombeau algebra）を始めとする一般関数の代数は極めて有効であり，既に応用面でも幾つかの成功を収めている。我々は，Colombeau および Todorov-Vernaeve の構成法を融合する形で改良して一般の微分空間上にコロンボー型一般関数を構成し，それを「漸近関数」と名付けた。コロンボー代数と同様に，漸近関数の全体はシュワルツ超関数を部分ベクトル空間として含んでいる。さらに，漸近関数は任意の微分空間の間の射に自然に拡張することができ，それを「漸近写像」とよぶとき，微分空間と漸近写像からなる圏は，完備性・余完備性を始めとする微分空間の圏の特質を継承するとともに，射の集合に関する次の重要な関係式を満たしている。

(a) 微分空間 X から別の微分空間 Y への漸近写像の全体 $D(X,Y)$ は，滑らかな写像の全体 $C(X,Y)$ を部分空間として含む微分空間である。
(b) 直積微分空間 $X \times Y$ から別の微分空間 Z への漸近写像の空間 $D(X \times Y,Z)$ は，滑らかな写像空間 $C(X,D(Y,Z))$ に同型である。
(c) １点空間上の実数値漸近関数の空間 $D(pt,R)$ は非アルキメデス的実閉体であり，複素数値漸近関数の全体 $D(pt,C)$ は，$D(pt,R) + iD(pt,R)$（i は虚数単位）の形の代数閉体である。

これらのことから，漸近写像の概念は，解析学のみならず微分空間のホモトピー論の研究においても極めて有効な手段を提供することが期待されるものとなっている。その証左の一つとして，滑らかな写像のみでは一般的には成立しない「ホモトピー拡張性質」および「被覆ホモトピー性質」が，漸近写像の枠組みでは常に成り立つことを示した。

(3)　コロンボー代数の理論におけるスカラーが零因子をもつ環であったのに対し，漸近写像の理論におけるスカラーは非アルキメデス順序体である。この利点を活かして，漸近関数を拡張する形で任意の微分空間上の「漸近微分形式」を構成することに成功した。漸近微分形式の全体はド・ラームカレント，すなわち，多様体上のコンパクトな台をもつ微分形式からなるベクトル空間上の連続汎関数の全体を部分ベクトル空間として含み，なおかつ，滑らかな微分形式の場合と同様に，実閉体上の次数付き外積微分代数を形成する。したがって，漸近微分形式は多様体上の通常の微分形式とド・ラームカレントの両者の特質を併せ持ち，幾何学的測度論等の研究分野において，その発展に大きく寄与することが期待できる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 島川和久
２．発表標題 Colombeau-like generalization of smooth maps between diffeological spaces
３．学会等名 New developments of transformation groups
４．発表年 2021年

１．発表者名 Kauhisa Shimakawa
２．発表標題 Generalized maps between diffeological spaces and their applications
３．学会等名 Building-up Differential Homotopy Theory 2020（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Kazuhisa Shimakawa
２．発表標題 Generalized functions and diffeology
３．学会等名 Building-up Diffeological Homotopy Theory（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

プレプリント（３件）
T. Haraguchi and K. Shimakawa, A model category of diffeological spaces, arXiv1311.5668v7 (2018)
T. Haraguchi and K. Shimakawa, A model category of diffeological spaces, I, arXiv2011.12842v1 (2020)
K. Shimakawa, Generalized maps between diffeological spaces, arXiv2002.11339v3 (2021)

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関