

令和 4 年 5 月 30 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03280

研究課題名(和文) 共形写像に関連する変分問題と計量のpullbackに関する変分問題の研究

研究課題名(英文) A variational problem on conformality of maps and a variational problem on pullbacks of metrics

研究代表者

中内 伸光 (Nakauchi, Nobumitsu)

山口大学・大学院創成科学研究科 教授

研究者番号：50180237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：「曲がった空間」をモデルとする「多様体」、特に「リーマン多様体」という一般的概念があり、そのリーマン多様体間の関係性として「写像」という概念がある。本研究課題の代表者は、リーマン多様体間の写像について、C-stationary map と symphonic map という2つの新しい概念を導入した。本研究は、これらの新しい概念についての研究であり、本研究課題では、いくつかの研究成果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これらの新しい概念は、もともと「共形写像」という重要な概念から導かれたものであり、本研究課題の研究成果は、「共形写像」を含む問題への応用を念頭に置いている。また、本研究の過程で用いられる議論や手法が、幾何解析(Geometric Analysis)の他の分野へ影響を与えることも期待している。

研究成果の概要(英文)：A "manifold", or in particular "Riemannian manifold" is a general concept of "a (curved) space", and a "map" between manifolds gives a "relation" between them. The researcher in this research project introduced two new concepts "C-stationary maps" and "symphonic maps" for maps between Riemannian manifolds. In this project we give some new steps and results on these two concepts.

研究分野：differential geometry

キーワード：variational problem symphonic map C-stationary map pullback Riemannian manifold

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2次元曲面の場合には、曲面上の複素構造の“モジュライ空間”であるところの Teichmüller 空間に、擬等角写像 (quasiconformal map) を用いて、Teichmüller 距離と呼ばれるところの、2つの複素構造の間の距離が導入される。2次元曲面では複素構造を共形構造と見なすことができ、2つの共形構造の違いを擬等角写像で測っていることになる。さらに、近年、Tromba 等により、擬等角写像の代わりに、調和写像 (harmonic map) を用いた Teichmüller 理論へのアプローチが与えられた。

本研究の研究代表者は、共形性(等角性)に関係する、あるテンソルに気がついた。2つのリーマン多様体 M, N および M から N へのなめらかな写像 f に対して、2階の共変テンソル $T_f = f^*h - 1/m |df|^2 g$ に着目する。ここで、 f^*h は f による、計量 h の pullback であり、 m は多様体 M の次元である。このテンソルが消えることと写像 f が weakly conformal であることは同値であり、写像の共形性を測るテンソルである。このテンソルの L^2 -ノルムについての変分問題を考えるとき、これは「写像の共形性(等角性)」を測る尺度になるのではないだろうか？言いかえると、(写像の各ホモトピークラスにおいて) このエネルギー汎関数を最小にする写像は、共形写像に“最も近い”写像であると期待できるのではないだろうか？これが、本研究を始めた経緯である。本研究は、これまでになかった全く新しい観点に基づくものであり、オリジナルな研究である。

2. 研究の目的

本研究課題の研究代表者により、上記で述べたエネルギー汎関数の停留写像は C-stationary map と名付けられた。そのうちの最小値を与える写像が、共形写像に最も近い写像と考えられる。この写像を特徴づける2階非線形微分方程式系の主要項は、一般に、楕円型ではない。

そこで、主要項を2つの楕円型(退化楕円型となる)のパーツに分解した。この議論は、例えば、total scalar curvature という汎関数を、gradient flow で述べると、Ricci flow part と Yamabe flow part の2つのパーツに分解した例などで、見受けられる。2つのパーツの分解により、一つは4-harmonic map のエネルギー汎関数が得られるが、もう一つは新しいエネルギー汎関数である。そこで、本研究課題の代表者は、この新しいエネルギー汎関数に着目し、その停留写像を symphonic map と名付けた。metric の pullback の観点に立てば、これまで幾何解析 (Geometric Analysis) で研究されてきた harmonic map は pullbacks of metrics の「トレース (trace)」の積分と見なせるのに対し、この新しいエネルギー汎関数は、pullbacks of metrics の「ノルム (norm)」の積分と見なすことができる。

本研究課題では、これら新しく導入された概念 C-stationary maps および symphonic maps について研究を進めていくことを目的とする。

3. 研究の方法

上述のように、本研究は、これまでになかった全く新しい観点に基づくものであり、研究についても内容と方法を一つ一つ構築していくことが必要となる。Harmonic maps などの変分問題の手法は、ある程度参考になるかもしれないが、C-stationary map の定義方程式、および、symphonic map の定義方程式の主要項の構造が、これまで研究されてなかったタイプのものであるため、多くのアイデアや新しい手法が必要である。

本研究課題の研究代表者により、これまでに研究は、中長期的戦略である程度進められており、その基盤に立って、さらに詳しい研究を行っている。

4. 研究成果

本研究課題で得られた研究成果は、大きく分けて3つある：

- (1) C-stationary maps および symphonic maps に対する stress energy tensor の導入とその基本的性質、および、それを用いた特徴づけ
- (2) 原点で特異性をもつ、高い次元の球面への C-stationary maps および symphonic maps の例
- (3) m-symphonic maps の導入と、weakly m-symphonic maps の正則性（Holder 連続性）

上記の3つの研究成果について、少し詳しく述べる：

- (1) C-stationary maps に対して stress energy tensor を定義し、その基本的性質を調べた。Stress energy tensor が消えることと、対応する C-stationary maps が weakly conformal maps であることが同値であることを証明した。Stress energy tensor は、C-stationary maps のエネルギー汎関数について、写像を固定して、定義域の計量を変形したときの gradient であることを計算で示した。Symphonic maps についても stress energy tensor を定義し、stress energy tensor が消えることと、定義域の多様体が4次元で、対応する C-stationary maps が weakly conformal maps であることが同値であることが導かれた。
- (2) Radial map $u(x) = x/|x|^p$ は、原点で特異点をもつ harmonic maps の有名な例であるが、これは、任意の p について p -harmonic maps であることも知られている。実は、この radial maps は C-stationary maps でもあり、symphonic maps であることが計算で確かめられる。Target manifold がより高い次元の球面であるとき 原点での特異性が、より複雑である C-stationary maps の例を2つ構成した。これらは symphonic maps にもなっている。さらに harmonic maps でもあり、 p -harmonic maps であることも計算で示された。それぞれの例は、 y_1, \dots, y_n の多項式（ただし、 $y_i = x_i/|x|^p$ ）としてそれぞれ、2次および3次の多項式であるので、特異性も、原点において2次および3次の多項式の次数の特異点になっている。
- (3) m-symphonic maps および weakly m-symphonic maps を導入し、 m 次元 Euclidean spaces の部分領域から一般次元の球面への weakly m-symphonic maps の正則性（Holder 連続性）を証明した。ただし、 m は多様体 M の次元である。m-symphonic map の方程式の主要項である m-symphonic operator に対して、monotonicity inequality を示したことがポイントとなっている。論文では、より一般の p -symphonic operator (p は4以上の実数) に対して monotonicity inequality を与えている。

最後になりましたが、この研究課題に科研費を交付していただいた日本学術振興会に感謝致します。論文として発表されたもの以外にも、本研究課題の研究内容は進展致しました。今後も、この研究を進めていく予定です。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masashi Misawa and Nobumitsu Nakauchi	4. 巻 22
2. 論文標題 Two examples of harmonic maps into the spheres	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Geometry	6. 最初と最後の頁 23 - 31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/advgeom-2021-0008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masashi Misawa and Nobumitsu Nakauchi	4. 巻 2
2. 論文標題 Regularity of the m-symphonic map	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SN Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 article 19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-021-00074-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shigeo Kawai and Nobumitsu Nakauchi	4. 巻 65
2. 論文標題 Liouville type theorem for symphonic maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 147-159
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.difgeo.2019.03.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nobumitsu Nakauchi	4. 巻 137
2. 論文標題 Stress energy tensor of C-stationary maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 217-227
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2018.12.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nobumitsu Nakauchi	4. 巻 12
2. 論文標題 Stress energy tensor for symphonic maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bollettino dell'Unione Matematica Italiana	6. 最初と最後の頁 431-440
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40574-018-0168-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Nobumitsu Nakauchi
2. 発表標題 A Variational Problem on Conformality of Maps and Related Problems
3. 学会等名 Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis --- Celebration of Professor Miyuki Koiso's Retirement --- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	内藤 博夫 (Naitoh Hiroo) (10127772)	山口大学・その他部局等 ・名誉教授 (15501)	
研究分担者	近藤 慶 (Kondo Kei) (70736123)	岡山大学・自然科学研究科・教授 (15301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------