様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 ２３ 日現在

機関番号：３２４０８
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３２８１

研究課題名（和文）原始形式と位相的漸化式

研究課題名（英文）Primitive forms and topological recursion

研究代表者
佐竹　郁夫（Satake, Ikuo）

文教大学・教育学部・教授

研究者番号：８０２４３１６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：研究代表者の佐竹は、LG モデルが1変数で定義される場合に具体例でアプローチしたが、これについて、Milanov 氏によるフルビッツ被覆に対する原始形式と位相的漸化式の議論で高種数の振動積分表示が得られ、1変数の場合は解決された。多変数 LG モデルのスペクトル曲線として周期写像から得られる被覆を用いるため、被覆とフロベニウス構造の研究を深め、Good invariants の理論を構築した。これは有限鏡映群不変式にも新たな視点を与えた。研究分担者の藤は位相的漸化式の研究を行い、双曲幾何学などで調べられてきたMasur-Veech体積などの幾何学量の物理的意味を明確にするなどの研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
位相的漸化式のアイデアは、特異点理論、振動積分、フロベニウス多様体、Gromov-Witten 不変量などミラー対称性として知られていた対応のみならず、双曲幾何学におけるMasur-Veech体積、結び目の不変量なども横断的に視野に入れることを要求しており、各分野での深いアイデアを交流させることができる。コクセター変換という、鏡映群不変式においてもその特異な位置を占める変換が、この研究成果により Frobenius 多様体の構造そのものを導くことがわかったため、今後は普遍的な内容として他分野での新たな位置づけを得ていくことは、学術的に意義があると考えている。

研究成果の概要（英文）：Principal investigator Satake approached the case where the LG model is defined by a one-variable potential with a concrete example. However the case of one-variable was solved by Milanov's discussion of primitive forms and topological recursion for Hurwitz coverings, which gave a high-species oscillatory integral representation.
In order to use the coverings obtained from periodic maps as spectral curves of the LG model defined by multivariate potentials, the theory of Good invariants was developed. This also gave a new perspective on finite mirror group invariants.
Fuji, a co-researcher of this project, studied topological recursion and clarified the physical meaning of geometric quantities such as the Masur-Veech volume, which has been studied in hyperbolic geometry.

研究分野：幾何学

キーワード：フロベニウス多様体

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

超弦理論に示唆されたミラー対称性の発見により、Calabi-Yau 多様体におけるミラー対を超えて、Fano 多様体 (およびその一般化) M と複素解析関数 W (Landau-Ginzburg potential と呼ばれており、以下 LG potential と略す) のミラー対が発見された。これより特に、Fano 多様体 M の Gromov-Witten 不変量の種数 0 部分が、LG potential W の振動積分と対応している。

これは種数 0 （部分的に種数 1）についての結果であるが、M に対するすべての種数にわたる Gromov-Witten 不変量を LG potential W を用いて構成することが期待される。

従来は、LG potential W に対して、原始形式の理論を用いて Frobenius 多様体（種数 0 部分）を構成し、それに対して Givental-Teleman による理論から Cohomological field theory （一般種数部分）を構築する方法が知られていた。

近年の位相的漸化式の理論の進展により、次のような新たな方法が見出された。LG potential W に対して上記のように Frobenius 多様体を構成し、それに対してスペクトル曲線 Σ を構成して（[1],[2])、Eynard-Orantin (さらには Bouchard-Eynard) による位相的漸化式の理論により、Gromov-Witten 不変量を得る方法である。

LG potential W が 1 変数関数の場合には、Σ は W のグラフと一致する。Fano 多様体 M として射影直線の場合には 1 変数関数 $W = x + \frac{1}{x}$ となる。この場合には上記の位相的漸化式による Gromov-Witten 不変量の構成は Norbury-Scott 予想として興味がもたれていたが、[3] ではこれについて群同変な場合にまで拡張して証明がなされた。[3] ではさらに、射影直線のミラーの場合においてのみではあるが、位相的漸化式に現れる Σ 上の多重有理微分形式 $\omega_{g,n}$ の多重振動積分が Gromov-Witten 不変量を記述することが見出された。

２．研究の目的

いくつかの問題点（原始形式は、LG potential W の定義域（N 次元とする）上の N-form であるが、位相的漸化式に現れる多重有理微分形式 $\omega_{g,n}$ はスペクトル曲線の対称積上の n 形式であることなど）はあるが、それを modulo すれば、この多重有理微分形式は原始形式の一般化（高種数化）を与えていると見なすことで、一般の原始形式についても、その高種数化の構成の可能性を探るというのが、この研究の目的である。

Gromov-Witten 不変量の研究に位相的漸化式を用いる研究は、下記文献のように現れてきているが、これを原始形式と関連させる点が、本研究の特色である。

位相的漸化式の理論は、行列模型に端を発し、現在では Hurwitz 数、knot 不変量、Gromov-Witten 不変量など様々な分野において現れ、大きな普遍性を持っている。

一方で、原始形式の理論は、当初、深みはあっても特異点理論における特殊な理論と考えられていたが、少しずつ対象を広げていて、高次留数対もより一般の枠組み (cyclic homology) に対してその定義を広げている。

この両者を結びつけることにより、原始形式の理論についてはその枠組みを広げ、位相的漸化式の理論については、原始形式の持っていた理論（振動積分の理論、高次留数対の理論、原始形式の取替えのモジュラー変換性）を位相的漸化式の一般論として吸収させることで、位相的漸化式が現れる上記の様々な分野に影響を与え、普遍的な知見を得ることができると考えている。

３．研究の方法

原始形式における振動積分の研究は、振動積分の満たす微分方程式の研究、漸近展開、積分領域としての Lefschetz thimble の構成、Lefschtz thimble の交点数と高次留数対の関係、ストークス現象の研究であり、これを de Rham cohomology 加群（Brieskorn lattice）の立場から行うものであった。

これを踏まえて、まずは射影直線のミラーである LG potential $W = x + \frac{1}{x}$ の場合に限定する。この場合には、そのスペクトル曲線 Σ やその上の多重有理微分形式 $\omega_{g,n}$ は具体的に決定されており、これらに対する振動積分や Lefschetz thimble の構成もされている。この多重有理微分形式を原始形式 dx/x の高種数化とみなし、原始形式における振動積分の研究（振動積分の満たす微分方程式、Brieskorn lattice における特徴づけ、リーマン関係式に相当する理論（高次留数対の理論）、ストークス現象のミラー対称性を用いた記述）を $\omega_{g,n}$ に対する振動積分についても行うため、まずはそれらの振動積分について微分方程式、漸近展開、交点数、ストークス現象の研究を具体的に遂行する。そして、Brieskorn lattice の高種数化となる、多重有理微分形式を扱うための de Rham cohomology 加群を構築し、de Rham cohomology 加群のもつ構造として理解するために、これら Lefschetz thimble の交点形式の研究に基づいて一般化された高次留数対の理論の可能性を探りたい。

また、射影直線の一般化として、射影直線のオービフォールドであって、そのミラーとなる LG potential が $W = x^n + \frac{1}{x}$ となる場合がある。これについては、W が 1 変数のためスペクトル曲線 Σ が簡単であることと、対応する Gromov-Witten 不変量が明確に存在することから、射影直線の次によい例であると考えられる。これについて、Eynard-Orantin による位相的漸化式の理論から多重有理微分形式をまず構成し、さらにその振動積分と Gromov-Witten 不変量との関係を構築した後、上記と同様の考察を行う。

さらに、LG potential W が 1 変数であるもうひとつの例である $W = x^{n+1}$ について考察する。この場合には、直接 Gromov-Witten 不変量とは対応せず、shifted Witten class of A_n singularity と呼ばれる cohomological field theory が対応することが知られている。これを手がかりにして、研究分担者と連携して、振動積分についての考察を進めることにする。

一方で、LG potential W が 1 変数でなく、一般に N 変数の時には、多重有理微分形式 $\omega_{g,n}$ はそのままでは原始形式の一般化とは見なせない。原始形式は N 次微分形式となるのに対し、多重有理微分形式はスペクトル曲線の n 個の積上で定義される n 次微分形式だからである。この場合に、$\omega_{g,n}$ の振動積分と同じ結果をあたえるような一般化（高種数化）された原始形式を Brieskorn lattice の n 重テンソル積に構築すること、原始形式が Brieskorn lattice の中で特徴付けられたように、一般化（高種数化）高次留数対のような枠組みを構築することを目標とする。

その場合でも、スペクトル曲線の扱いは LG potential W が 1 変数でない場合には具体的な取り扱いが難しいが、あるクラスの射影直線のオービフォールドについては、スペクトル曲線を Dubrovin による extended affine Weyl 群による商として構成できると考えられる。これは、Milanov による Weyl 群商によるスペクトル曲線の構成の一般化である。

また、W が N 変数であっても、W として $W_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_1 x_2 x_3$ としたときに、得られる理論が、1 変数の LG potential $W_2 = x + \frac{1}{x}$ の理論、すなわち射影直線のミラーと同じになることを指導原理として、W_1 に対する原始形式や Brieskorn lattice はよくわかっていること、一方で、1 変数の W_2 に対するスペクトル曲線や位相的漸化式、振動積分について上記のように研究しておくことで高種数化がわかることを比較

することで、W_1 の場合に対応する Brieskorn lattice の n 重テンソル積内の元を見出していく。Brieskorn lattice とその上で定義される高次留数対は、cyclic homology 上の双対形式として理解されることから、これら Brieskorn lattice の高種数化は、cyclic homology やその上の双対形式の高種数化のあるべき形を明確にすることを期待している。

また、原始形式の特徴づけに関連して、原始形式が一意に定まらない場合を考える。具体的には、LG potential W が単純楕円型特異点を持つ場合であるが、この場合には原始形式の取替えによる変換性は研究代表者の研究により Frobenius 多様体の変換性（モジュラー変換性）として、具体的な記述がなされている（[4]）。これについて、従来は、高次留数対による特徴づけから得られる微分方程式の解の取替えとして理解されていたが、これを位相的漸化式の立場から、より幾何学的に理解することが期待できる。これについては、位相的漸化式が（特異点とは異なる）他の例において、スペクトル曲線が楕円曲線の場合にモジュラー変換性が現れることが研究分担者から指摘されており、研究分担者と協力して単純楕円型特異点の場合と合わせて普遍的な理解ができることを示したい。これについては、研究分担者との共著である [5] における位相的漸化式を用いた振動積分の構成を単純楕円型特異点で行うことで、スペクトル曲線のホモロジー基底の取替えとして理解できると期待できる。

４．研究成果

研究代表者の佐竹は、LG モデルが 1 変数のポテンシャルで定義される場合に具体例でアプローチしたが、これについて、Milanov 氏によるフルビッツ被覆に対する原始形式と位相的漸化式の議論で高種数の振動積分表示が得られ、1 変数の場合は解決された。多変数のポテンシャルで定義された LG モデルでは、1 変数に帰着できる場合以外は高種数の振動積分表示は現在のところ得られていない。このため、単純楕円型特異点に対するスペクトル曲線を周期写像から得られる被覆を用いるため、Good invariants の理論を構築した。これは有限鏡映群不変式にも新たな視点を与えた。その被覆とフロベニウス構造との関係を、構築した Good invariant の理論から研究した。特に、Good invariant については、admissible triplet の存在や canonical decomposition の構成など理論的に整備することができ、今後の研究につなげることができた。

Good invariants について、より詳しくは、楕円ルート系から得られる楕円ワイル群についての商空間に入るフロベニウス構造を、コクセター変換を用いて再定義することができたが、これについていくつか明確になった。

1 つは、Good invariant について、$A_1^{(1,1)}$ 型の場合に詳しく計算し、この場合には Good invariant が admissible triplet の取り方に依存し、一意的でないことを具体的に示すことができた。

また、admissible triplet の存在証明について、以前は構成することで存在を示していたため、どこが非自明かが明確でなかったが、admissible triplet の条件を分解し、一般的に成り立つことと非自明な部分を分離することができ、明確な議論となった。ここで、楕円ワイル群が作用する空間について、「canonical decomposition」を見出したことが用いられる。この分解は、複素解析的ではないが canonical な直積分解であり、楕円 Artin 群についての研究に効果的に用いられると期待される。

研究分担者の藤は行列模型およびリーマン面のモジュライ空間の構造の解明に向けた位相的漸化式の研究を行なった．特に理論物理学では主に量子重力理論の解析を中心に行い，背後に潜む位相的漸化式の構造を調べることにより，双曲幾何学などで調べられてきた Masur-Veech 体積などの幾何学量の物理的意味を明確にするなどの研究に取り組んだ．こうした位相的漸化式に基づくリーマン面のモジュライ空間の構造の解

析に関する理論物理学的アプローチが，原始形式においてどのように解釈され，新たな側面の発見につながるかについては今後の研究の課題であると考えられる。

[1] P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, L. Spitz, Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure, Comm. Math. Phys. **328**, (2014) 669-700.

[2] P. Dunin-Barkowski, P. Norbury, N. Orantin, A. Popolitov, and S. Shadrin, Dubrovin's superpotential as a global spectral curve, arXiv:1509.06954 (2015).

[3] B. Fang, C.-C. M. Liu, Z. Zong, The Eynard-Orantin recursion and equivariant mirror symmetry for the projective line, arXiv:1411.3557 (2014).

[4] I. Satake, Frobenius structures and characters of affine Lie algebras, Osaka Journal of Mathematics **56** No.1, (2019) 183-212.

[5] Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Masahide Manabe, and Ikuo Satake, Reconstructing GKZ via topological recursion, Comm. Math. Phys. **371**, (2019) 839-920.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Hitoshi Murakami and Yuji Terashima	４．巻 －
２．論文標題 Witten－Reshetikhin－Turaev Function for a Knot in Seifert Manifolds	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Communications in Mathematical Physics	６．最初と最後の頁 －
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-03953-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Ikuo Satake	４．巻 56
２．論文標題 Frobenius structures and characters of affine Lie algebras	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Osaka J.　Math.	６．最初と最後の頁 183-212
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Masahide Manabe, Ikuo Satake	４．巻 371
２．論文標題 Reconstructing GKZ via topological recursion	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Communications in Mathematical Physics	６．最初と最後の頁 839-920
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-019-03590-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Hiroyuki Fuji, Issaku Kanamori, Shinsuke M. Nishigaki	４．巻 8
２．論文標題 Janossy densities for chiral random matrix ensembles and their applications to two-color QCD	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Journal of High Energy Physics	６．最初と最後の頁 1-44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/JHEP08(2019)053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　12件／うち国際学会　2件）

1．発表者名
佐竹郁夫

2．発表標題
Coxeter 変換から定まる良い不変式とフロベニウス構造

3．学会等名
筑波大学数学域談話会（招待講演）

4．発表年
2023年

1．発表者名
藤　博之

2．発表標題
On a generalization of the Masur-Veech volume via two dimensional gravities

3．学会等名
Topics on mathematical structures in string theory（招待講演）

4．発表年
2024年

1．発表者名
佐竹郁夫

2．発表標題
Good basic invariants for elliptic Weyl groups and Frobenius structures

3．学会等名
Mirror symmetry and related topics, 2022（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2022年

1．発表者名
藤　博之

2．発表標題
行列模型と位相的漸化式

3．学会等名
Aspects of Mirror Symmetry 2022（招待講演）

4．発表年
2022年

１．発表者名 佐竹郁夫
２．発表標題 楕円ワイル群の不変式論へのアプローチ
３．学会等名 京都大学数理解析研究所　表現論セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 佐竹郁夫
２．発表標題 Frobenius manifold structure and invariant polynomials for elliptic Weyl group
３．学会等名 研究集会「Stability condition, Frobenius Manifold and Mirror symmetry」（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 佐竹郁夫
２．発表標題 Coxeter Transformation and the Frobenius structure
３．学会等名 国際研究集会「Mirror symmetry and related topics, 2019」（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 佐竹郁夫
２．発表標題 Coxeter Transformation and Frobenius manifold
３．学会等名 高知小研究集会「非可換代数幾何学の大域的問題とその周辺」（招待講演）
４．発表年 2019年

1．発表者名 藤　博之
2．発表標題 ファットグラフによる RNA の擬ノット構造に関する モデル
3．学会等名 総研大-理研 iTHEMS 連携ワークショップ「遺伝と数理」（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 藤　博之
2．発表標題 RNA を表現するファットグラフモデルと行列模型
3．学会等名 名古屋大学多元数理科学研究科談話会（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Ikuo Satake
2．発表標題 On the Coxeter transformation for the elliptic affine root system
3．学会等名 Kobe studio seminar（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Hiroyuki Fuji
2．発表標題 Reconstructing GKZ via topological recursion
3．学会等名 Physics Seminar, Korea Institute of Advanced Study（招待講演）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

2023年度に、筑波大学大学院にて、研究代表者の佐竹郁夫が集中講義「特異点の変形に付随した鏡映群不変式について」を行った。
2023年度に、九州大学大学院数理学府にて、研究分担者の藤博之が集中講義「位相的漸化式入門」を行った。

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	藤　博之 (Fuji Hiroyuki) (50391719)	大阪工業大学・情報科学部・教授 (34406)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関