様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　４月２４日現在

機関番号：１８００１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３２８３

研究課題名（和文）ブレイド群・写像類群の幾何と増大度

研究課題名（英文）Geometry of the braid groups and mapping class groups and their growth

研究代表者
藤井　道彦（Fujii, Michihiko）

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：６０２５４２３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：離散群Γに対して、ケーリーグラフ内の測地線を見つけるアルゴリズムPを構築することによって、Γの増大級数の有理関数表示を求めることを目的とした。１．研究代表者の藤井と分担者の佐藤・逆井は、ブレイド群に付随する随伴群Γに対して、ブレイドの糸の本数が少ない場合にはアルゴリズムPの構築に成功し、Γの増大級数の有理関数表示を求めた。２．藤井と分担者・逆井は、円板上に特異点を持つザイフェルト・ファイバー空間の基本群Γに関して、アルゴリズムPの構築に成功し、増大級数を具体的に求めるコンピューター・プログラムを作成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
離散群の増大級数は、幾何学的群論において重要な研究テーマであるにもかかわらず、個々の離散群に対して、具体的に増大級数を求めることは一般に難しい。本研究では、幾何において重要な離散群の増大級数をいくつか具体的に求めることに成功した。この計算結果および計算過程で用いられた手法を分析することによって、３次元多様体の基本群やブレイド群などに関連して、数理物理、表現論、暗号理論などの他分野への応用をもたらすことが期待できる。

研究成果の概要（英文）：The principal investigator Fujii and the co-investigators succeeded in constructing algorithms to compute the spherical growth series for the adjoint groups with respect to the braid groups in simple cases and the fundamental groups of certain Seifert fibered spaces.

研究分野：幾何学

キーワード：離散群　増大級数　ブレイド群　ザイフェルト・ファイバー空間　ケーリー・グラフ

１．研究開始当初の背景

サーストンが双曲群の増大級数の有理関数表示問題を提起して以来、様々な条件のもとで双曲群の増大級数の有理関数表示に関する研究が、ヨーロッパと米国の研究者を中心として行われてきた。その後、エプシュタインが一般の離散群に対してオートマティック構造という概念を導入して「離散群の増大級数の有理関数表示が可能であるかどうか」というように問題を広げると、離散群の増大級数に関する研究がますます盛んに行われるようになった。研究開始当初は、離散群の中でもブレイド群を始めとするアルティン群の増大級数が有理関数表示を持つかどうか、という問題意識のもとで、様々な角度からアルティン群の増大級数の研究が行われていた。マイレッセとマテウスや研究代表者・藤井によって、３本糸から成るブレイド群と純ブレイド群の増大級数の有理関数表示が得られていたが、糸の本数が４本以上の場合についてはブレイド群・純ブレイド群の増大級数の有理関数表示は得られていなかった。一方、曲面の写像類群に関しては、モッシャーによって、写像類群がオートマティック構造を持つことが示されていたが、写像類群の重要性の割には、その増大級数に関する研究は国内外でもあまりなされていないという状況であった。以上のことから、ブレイド群や写像類群を始めとする幾何的に重要な離散群に関して、その増大級数に関する研究を進めていくことは重要であると考えられていた。

２．研究の目的

有限生成な離散群Γに対して、有限生成系を１つ選び、群Γのケーリー・グラフを考える。本研究では、幾何的に重要な群に的を絞って、ケーリー・グラフの構造を考察して、群の測地的代表元を見つける方法（アルゴリズム）を探究して、群の増大級数・増大度を求めることを目的とした。

３．研究の方法

（１）　研究代表者・藤井と分担者・佐藤は、主に幾何学的群論の手法を用いてブレイド群のケーリー・グラフの構造解明を行う。特に４本糸から成るブレイド群に関しては、正モノイドの元の効率的な分割を見つけるアルゴリズムの構築方法を探究する。そのアルゴリズムの構築に成功した場合には、４本糸のブレイド群の増大級数を求めるコンピューター・プログラムを開発して、増大級数を具体的に求めていく。

（２）　藤井と分担者（逆井、佐藤）は、ブレイド群に付随する随伴群に関して、幾何群論的側面から研究を行い、随伴群の構造を解明し、随伴群の測地的代表元を見つけるアルゴリズムの構築方法を探究する。

（３）　藤井と分担者・逆井は、ザイフェルト・ファイバー空間の基本群に関して、ガーサイド性に着目して研究を行い、幾何群論的側面から構造を解明する。

（４）　研究代表者・藤井は分担者（佐藤、逆井、河澄）と共に、幾何群論およびトポロジーの側面から写像類群のケーリー・グラフの構造解明を行う。

４．研究成果

（１）　研究代表者・藤井と分担者・佐藤は、Γが４本の糸から成るブレイド群の場合に、「Γの元の標準的な代表元（ガーサイド標準形という）からスータブル・スプレッド法を用いて得られる元が測地的にならない」という不規則な現象がガ―サイド標準形上に現れる基本的元の個数が１以上の場合に生じることを発見した。３本の糸から成るブレイド群の場合にはこのような不規則な現象は生じないことは分かっているので、本研究での不規則な現象の研究結果は、３本の場合には生じないが４本以上の糸からなるブレイド群の増大級数の具体形を求める際に生じる困難な状況を明らかにしていて、かつ、４本以上の糸からなるブレイド群のケーリー・グラフの複雑性を測地線の観点から説明するものとなっている。その点で本研究は幾何学的群論の立場からも意義のあるものである。具体的には次のことが分かった。

①　ガーサイド標準形上に現れる基本的元の逆元の個数が１個の場合には、この不規則な現象がいくつかのパターンに分類できることが分かった。それぞれのパターンで、ある手順を踏めば、ガ―サイド標準形からスータブル・スプレッド法で測地的元が得られることを明らかにした。

②　ガーサイド標準形上に基本的元の逆元が２個以上現れる場合には、１個しか現れない場合には生じないような複雑な現象が起こることを発見した。つまり、この場合には、ガーサイド標準形の正モノイド部分のスクエア・フリー元への分割の状況に応じて決まる複雑なパターンが存在することが分かったのである。本研究では、こららのパターンをある程度、分

類することが出来た。

（２） 藤井と分担者・佐藤および逆井は、３本以上の糸から成るブレイド群Γに関して、ブレイド群Γよりも扱いが易しい上にブレイド群自体の構造解明に役立つと見込まれる、ブレイド群に付随する随伴群Γ'に注目して、その測地的元の研究を行った。糸の本数が少ない場合には随伴群Γ'に対して、ケーリー・グラフ内の測地線を見つけるアルゴリズムの構築に成功した。その結果、Γ'の増大級数の有理関数表示を具体的に求めることが出来た。今後は、糸の本数が多い場合について研究していくよう計画している。また、ブレイド群Γと随伴群Γ'の関係に着目して、本研究での成果をブレイド群の場合に拡張できるかどうかについて研究していきたい。

（３） 藤井は、ｎ個（ｎは２以上の整数）の２以上の整数 p1、p2、…、pn を与えると定まる、n個の無限巡回群の融合積となる群Λについて、詳細に研究した。この群Λは幾何学的にいうと円板上にn個の特異点を持つザイフェルト・ファイバー空間の基本群である。得られた研究成果は次のものである。

① 群Λに対する正モノイドがΛに自然に単射で埋め込めることを示した。証明でポイントとなるのは、１９７２年にブリースコーンと斎藤が有限型アルティン群に対して正モノイドの元のキャンセラティビティを示したのと同様の議論が群Λについても行える点である。

② 群Λの幾何的および代数的な観点から最も自然な有限生成系を取ることにする。本研究では、その生成系を選んだ場合の群Λの元の代表元が測地的であるための必要十分条件を与えた。幾何学的群論の観点からみると、ここで与えた条件は、２００６年にマイレッセとマテウスが二面体型アルティン群の場合に与えた必要十分条件を大幅に一般化したものとなっている。さらに、マイレッセとマテウスの条件が１次元的であるのに対して、本研究での条件は３次元的であり、スータブル・スプレッド法を適用する場合に技術的に複雑な作業が必要となっている。

③ ②で得られた必要十分条件を用いて、群Λの各元に対して丁度一つだけ測地的代表元を取り出すアルゴリズムを構築した。

④ ③で構築したアルゴリズムを用いて、群Λの増大級数に関する公式が得られ、その有理関数表示が得られることがわかった。

⑤ n=2 かつ p1=p2 の場合（１９９２年：エドジュベットとジョンソン）、n=2 かつ (p1,p2)=(2,3) の場合（１９９４年：シャピロ）、n=2 かつ 任意の組 (p1,p2) の場合（１９９９年：ジルおよび２０１８年：藤井）に、群Λ の増大級数の有理関数表示が得られていたが、④での公式は、これらの結果を大きく一般化したものであり、群Λの幾何群論的研究においてインパクトがあるといえる。また、２０１３年に田村、中川および山下によって、本研究で扱っている有限生成系とは異なる有限生成系に関する、群Λの増大級数の有理関数表示が得られているが、本研究で考えている有限生成系の方が幾何的にも代数的にも自然である。

⑥ 藤井は分担者・逆井と共に、④でのアルゴリズムを実装するコンピューター・プログラムを数式処理システム(Mathematica)を用いて作成し、群Λの増大級数の有理関数表示を得た。このプログラムを計算機上で実行すると、n個の整数 p1,…,pn を与えると瞬時に増大級数の有理関数表示を得られる。この点で、このプログラムは大変有用である。コンピューター・プログラムは琉球大学・学術リポジトリに掲載した。

⑦ また、群Λに関しては、すべての測地的代表元を捉えることもできた。

⑧ 本研究課題の終了後には、⑥でのコンピューター・プログラムによる計算結果をもとにして、群Λの増大級数の複素解析的な性質の研究を進めていくよう計画している。

⑨ また、群Λは、３次元ザイフェルト・ファイバー空間の基本群であるので、多様体論の観点から、その種々の位相不変量と群Λの増大級数との関係性を研究することも今後の研究課題となる。

（４） 分担者・河澄は、次の研究成果を得た。

① 曲面上の基点つき単純閉曲線の対数におけるトゥラエフ余加群構造射の値にベルヌーイ数が現れることを証明し、同時ベルヌーイ数に関するクロネッカー関係式の一般化を定式化し証明した。

② 種数０のコンパクト曲面について、ゴールドマン-トゥラエフ・リー双代数構造の形式性問題の解が柏原-ヴェルヌ問題の解と一致することを示した。

③ 空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト曲面についてフレーミングのホモトピー集合における写像類群作用の軌道集合を計算した。

④ 群状展開がゴールドマン括弧積の形式表示を与えるならば、それは特殊・斜交展開の共役となることを証明した。

⑤ 自由群の自己同型群のねじれ安定コホモロジーについて wheeled PROP 構造を導入した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Michihiko Fujii	４．巻 41
２．論文標題 A new formula for the spherical growth series of an amalgamated free product of two infinite cyclic groups	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Kodai Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 475，511
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　4件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Michihiko Fujii
２．発表標題 The geodesic growth of a Seifert fiber space
３．学会等名 RIMS Workshop, Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 藤井　道彦
２．発表標題 How a geodesic representative of an element of the braid group is obtained
３．学会等名 Geomety of Riemann surfaces and related topics（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 藤井　道彦，逆井　卓也
２．発表標題 The spherical growth series of amalgamated free products of infinite cyclic groups
３．学会等名 日本数学会・秋季総合分科会
４．発表年 2023年

１．発表者名 藤井　道彦
２．発表標題 Growth of Garside Groups
３．学会等名 拡大版「リーマン面・不連続群論」（招待講演）
４．発表年 2024年

１．発表者名 河澄　響矢
２．発表標題 A double version of Turaev ' s gate derivatives
３．学会等名 RIMS Workshop, Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces（招待講演）
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

増大級数の計算に関するコンピューター・プログラム（Computer program written in Mathematica to calculate the spherical growth series of amalgamated free products of infinite cyclic groups）を琉球大学の学術レポジトリにて公開した。 http://hdl.handle.net/20.500.12000/0002019730

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	河澄　響矢 (KAWAZUMI Nariya) (30214646)	東京大学・大学院数理科学研究科・教授 (12601)	

６．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	逆井　卓也 (SAKASAI Takuya) (60451902)	東京大学・大学院数理科学研究科・准教授 (12601)	
研究分担者	佐藤　隆夫 (SATOH Takao) (70533256)	東京理科大学・理学部第二部数学科・教授 (32660)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関