様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 ２７ 日現在

機関番号：３２４０３

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：１８Ｋ０３２８４

研究課題名（和文）等長リー変換群作用とコンパクト局所等質リーマン多様体上の幾何構造

研究課題名（英文）Locally homogeneous Kaehler manifolds and Transformation groups

研究代表者

神島　芳宣（Kamishima, Yoshinobu）

城西大学・理学部・特任教授

研究者番号：１０１２５３０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：このプロジェクトでは，大きな対称性をもつリー群Gの可微分作用がX上にあるとき閉非球形リーマン多様体X/Γの幾何構造を調べた.変換群の観点から可縮空間Xへの群作用を調べることによりX/Γを調べた.X/Γはインフラ-可解多様体をファイバーとするSeifert fiberingの構造を持つことを示した.トポロジーの観点からは群Γは群拡大: 1→Δ→Γ→ Q→ 1を持つことがわかり,Seifert fiberingを通して軌道束の繰り返しによるリーマン多様体のインフラ可解タワーが得られ,この構造定理を使って具体的な多様体(局所等質ケーラー多様体, また局所等質佐々木多様体)を特徴づけた.

研究成果の学術的意義や社会的意義
研究成果の社会への発信は東京という地理的条件もあり大学をあげて努めた.具体的には城西大学紀尾井町キャンパスにおいてコロキュウムを開催,また坂戸(埼玉)キャンパスではオープンユニバーシティでわかりやすく研究成果の一端を社会に還元している.一方で海外には研究集会(サマースクール（Hamburg)を含む）に赴き長期のスパンでの講義・連続講演を提供することで,社会における基盤としての数学の重要性を世界に伝えている.この分野における学術的な意義として,様々な分野への結果に対する,理論的担保と永久の信頼性を与える数学的基盤の構築を行った.

研究成果の概要（英文）：The following were the subjects of my research. I.Structure of Isometry groups with radical,and aspherical Riemannian manifolds with large symmetry. Classification of infra-solv tower of fiber bundles.
(Isometry groups with radical,and aspherical Riemannian manifolds with large symmetry.II.Isometric classification of compact locally homogeneous aspherical
Kaehler, Sasaki manifolds. We proved every compact aspherical Riemannian manifold admits a canonical series of orbibundle structures with infra-solv fibers which is called an infra-solv tower. Its length and the geometry of its base measure the degree of continuous symmetry of an aspherical Riemannian manifold. We show that the manifold has large local symmetry if it admits a tower of orbibundle fibrations with locally homogeneous fibers infra-solv tower whose base is a locally homogeneous space. We constructed examples of aspherical manifolds with large local symmetry, which do not support any locally homogeneous Riemannian metrics.

研究分野：幾何学とトポロジー

キーワード：幾何構造　群の対称性　非球形多様体　幾何的剛性　可微分剛性　Infra-可解タワー　リー群と等質空間　等長群

## １．研究開始当初の背景

この研究は当初の予定に対してコロナウイルス感染症 (Covid-19) の影響により 2 年間の延長期間を経て最終年度が 2023 年となった．幾何多様体の多くは, それが持つトポロジー的性質により幾何構造, 多様体の構造, 可微分剛性さらにはリー変換群の対称性について特徴づけられることを経験的に知っている．このことに鑑み, 当該年度の研究は連続リー群 $G$ の可微分作用が可縮リーマン多様体 $X$ 上に存在しているとき, 与えられた非球形コンパクトリーマン多様体 $X/\Gamma$ の幾何構造について特に等長群にかかわる問題を過去から現在までにわたって調べた.

**２．研究の目的** 我々の研究も一昨年からは当初の目的を達し, その主結果のさらなる応用という方向で進めていった．可縮リーマン多様体 $X$ 上に離散群 $\Gamma$ が等長変換として自由かつ固有不連続に作用するとき, コンパクト非球形リーマン商多様体 $X/\Gamma$ が得られる．このプロジェクトの研究目的は, 大きな対称性をもつリー群 $G$ の可微分作用が $X$ 上に存在しているときに閉非球形リーマン多様体 $X/\Gamma$ の幾何構造を調べることであった．変換群の観点から商空間 $X/\Gamma$ よりもむしろその可縮被覆空間 $X$ 上の連続群作用を調べることにより $X/\Gamma$ を特徴づけた．$G$ の Levi 分解を通して, $X/\Gamma$ はインフラ-可解多様体 $\mathsf{R}/\Delta$ をファイバーとする Seifert fibering の構造を持つことを示した．Topology の観点から群 $\Gamma$ は群拡大: $1 \to \Delta \to \Gamma \to Q \to 1$ を持つ．これに付随して, Seifert fibering: $\mathsf{R} \to X \to W$ ができ,$X/\Gamma$ と同じ性質を持つ底空間 (一般に orbifold) $W/Q$ が得られるため, 結果として軌道束 (orbi-bundle) の繰り返しによるリーマン多様体のインフラ可解タワーが得られる．　すでに過去の報告でも述べたが, この構造定理を使って具体的な多様体の構造を特徴づけた．$X/\Gamma$ として, 局所等質ケーラー多様体, また局所等質佐々木多様体, 局所共形ケーラー多様体（Vaisman 多様体）などを特徴づけた．$n(>2)$-次元 homotopy torus がインフラ可解タワーにより一点にたどり着くとき, standard torus に微分同相になる. (つまり大きな対称性のある exotic torus は存在しない.) 応用性の高いものとしてコンパクト商を持つ可縮な空間上のコンパクト Lie 群作用の非存在性を示す次の位相的結果を得た.

**定理 A.** *可縮な可微分空間 $X$ 上に離散群 $\Gamma$ が可微分 properly discontinuously ( 固有不連続 ) に作用し, $X/\Gamma$ はコンパクトとする．　与えられたコンパクト群 $K$ が $X$ に可微分かつ忠実に作用しているとき, もし $\Gamma$ の作用が $K$ の作用を正規化（normalize）するならば, $K = \{1\}$ （自明）である.*

この定理の証明は非輪状複体に作用している群のコホモロジー (cohomology) 論に基づく．また Smith の特別ホモロジー群の結果も利用する．この系として, 次が得られる.

**系 B.** *$X/\Gamma$ はコンパクトであるような可縮なリーマン多様体を $X$ とするとき, 等長群 $\mathrm{Iso}(X)$ は非自明なコンパクト正規部分群を持たない.*

## ３．研究方法

コンパクトな非球形多様体 $X/\pi$ が与えられたとき, 被覆空間 $X$ にリー群が効果的に作用しているとする．我々の方法は $X/\pi$ をリーマン多様体とし, 連結リー群として等長群 $\mathrm{Iso}(X)^0$ をとり, $X/\pi$ を幾何的に等長ファイバー束 ($=\mathrm{Iso}(X)^0$ の極大可解正規リー群により $X$ の商をとることでファイバーが可解等質空間で底空間がリーマン軌道空間となるファイバー束）を求め, さらにトポロジー的には変換群論を通してその底空間の基本群を調べることであった.

## ４．研究成果

$X$ を可縮なリーマン多様体, $\mathrm{Iso}(X)$ をその等長リー群とする. $\Gamma \leq \mathrm{Iso}(X)$ は離散群でハウスドルフ商空間 $X/\Gamma$ がコンパクトとする (以下 $X$ 上に このような性質を持つ $\Gamma$ がひとつでもあるとき $X$ を *divisible* という.) とくに $\Gamma$ が $X$ に自由に作用するとき, $X/\Gamma$ は閉非球形多様体である. $\mathrm{Iso}(X)$ の群作用として連続成分 $\mathrm{Iso}(X)^0$ は $X/\Gamma$ の**局所対称性**を記述すると思われる. 実際 Farb と Weinberger (Ann. of Math. 168) は基本的定理 : 商空間 $X/\mathrm{Iso}(X)^0$ は再び可縮な**多様体**になることを示した. この結果 $X/\Gamma$ はリーマン軌道束 $X/\Gamma \to X/\Gamma\,\mathrm{Iso}(X)^0$ という構造をもつことが示される. ここでファイバーは $X_{\mathrm{Iso}(X)^0} = \mathrm{Iso}(X)^0/\mathsf{K}$ にモデル化された局所等質空間である. ($\mathsf{K}$ は $\mathrm{Iso}(X)^0$ の極大コンパクト群.)

この設定のもとで, リーマン商 $X/\mathrm{Iso}(X)^0$ における連続等長群は再び非自明であろうと思われ, 従って $X$ の**隠された局所対称性**を現すと考えられる. この視点にたって, さらに $X/\Gamma$ の局所対称性は次々と商をとることで続く (局所等質ファイバーをもつ) 軌道ファイバー束のタワーにエンコードされていくと考えられる. つまり $M = X/\Gamma$ ($\Gamma \leq \mathrm{Iso}(X)$) が大きな局所対称性をもつとは,

$$M \to M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_k = \{\mathrm{pt}\}$$

なるタワーが存在することを意味する. 具体的に得られた結果を述べる. まず初めに $\mathsf{R} \leq \mathsf{G} = \mathrm{Isom}(X)^0$ を極大連結可解群（可解 radical という) とする. 最初の結果は

**定理 1.** *商空間 $X_1 = X/\mathsf{R}$ は可縮リーマン多様体であり, $\Gamma$ の $\mathrm{Iso}(X_1)$ への像 $\Theta$ は $X_1$ 上固有不連続に作用し, $X_1/\Theta$ はコンパクトである. とくに, 可解商はこれに付随したリーマン軌道束 $X/\Gamma \to Y/\Theta$ を与え, そのファイバーは $\mathsf{R}$ にモデルされた局所等質空間である.*

次に定理 1 から得られるトポロジーの結果として次を得た.

**定理 2.** *$X$ を向き付け可能非輪状多様体とし, $\Gamma$ は可微分かつ固有不連続に作用し, その商 $X/\Gamma$ はコンパクトとする. $H$ はコンパクトリー群で $X$ 上可微分かつ忠実に作用していて, その $H$ の作用は $\Gamma$ により正規化されるならば, $H$ の作用は自明, いいかえると $H = \{1\}$ である.*

この幾何的応用として次が得られる.

**系 1.** *$X$ を divisible な可縮なリーマン多様体とする. このとき $\mathrm{Iso}(X)$ はコンパクト正規部分群を持たない.*

上の定理に基づいて固有不連続作用の詳細な解析を行い $X/\Gamma$ について次の構造定理を得た.

**定理 3.** *$X$ を divisible な可縮なリーマン多様体とする. $\Gamma \leq \mathrm{Iso}(X)$ は離散群で $X/\Gamma$ はコンパクトとする. さらに $\mathsf{R}$ は $\mathrm{Iso}(X)^0$ の非自明な可解 radical とする. このとき, 商 $X/\mathsf{R}$ には一意的なリーマン計量とリーマン サブマーション (submersion) $p : X \to X/\mathsf{R}$ が存在して, つぎを満たす.*

(1) $\mathrm{Iso}(X)/\mathsf{R}$ は $X/\mathsf{R}$ に固有に作用する.
(2) (1) の作用の核 (*kernel*) は $\mathrm{Iso}(X)/\mathsf{R}$ の極大コンパクト正規部分群である.
(3) $\mathrm{Iso}(X)^0$ の $\mathrm{Iso}(X/\mathsf{R})$ における像 $S$ はノンコンパクト型の半単純リー群（中心は有限を持たない ). さらに $S$ は $\mathrm{Iso}(X/\mathsf{R})^0$ の正規閉部分群である. ( ゆえに $\mathrm{Iso}(X/\mathsf{R})$ は有限指数の部分群 $G$ をもち, $S$ は $G$ において正規である.)
(4) $\Theta \cap S$ は $S$ においてユニフォーム *lattice.*

リーマン軌道束 $X/\Gamma \to Y/\Theta$ はそのファイバーが R にモデルされたコンパクト可解軌道空間であるとき, *infra-*可解束と呼ばれる. 次はリーマン軌道束の幾何に関する主結果である.

**定理 4.** R の中に単連結可解正規部分群 $\mathsf{R}_0$ が存在して $X/\Gamma$ は $\mathsf{R}_0$ にモデルされたリーマン *infra-*可解ファイバーの構造を持ち, その底空間はコンパクト非球形リーマン軌道体 $Y/\Theta$ である.

**系 2.** 任意の非球形リーマン軌道体 $X/\Gamma$ は標準的なリーマン *infra-*可解ファイバータワーを与える.

$$X/\Gamma \longrightarrow X_1/\Gamma_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_\ell/\Gamma_\ell\ ,$$

ここで $\mathrm{Iso}(X_\ell)$ の可解 *radical* は自明である.

定理 1 によれば radical 商 $Y = X/\mathsf{R}$ は可縮リーマン多様体で $\Gamma$ の $\mathrm{Iso}(Y)$ への像 (群) により divisible である. 一般に等長群 $\mathrm{Iso}(Y)$ は非自明な連続群 $\mathrm{Iso}(Y)^0$, またその radical を持っている. 次に与えられた群拡大 $1 \to \Lambda \to \Gamma \to \Theta \to 1$ から出発して infra-可解束を構成する一般的な方法を導入する. ここで一般に $\Lambda$ は poly-サイクリック群で $\Theta$ は可縮リーマン多様体 $Y$ の divisible 離散群を考える. この構成は Lee-Raymond により展開された**単射** *Seifert* **ファイバー空間** の手法に基づく.

**定理 5.** $\Theta$ を双曲群 $\mathrm{PSO}(n,1)$ の部分群で有限位数の元を持たないユニフォーム *lattice* とする. 中心拡大 $1 \to \mathbb{Z}^k \to \Gamma \to \Theta \to 1$ が与えられ, この $\Gamma$ の 2-コサイクル $(\in H^2(\Theta, \mathbb{Z}^k))$ は無限位数とする. このとき, コンパクト非球形多様体 $X/\Gamma$ が存在して次を満たす.

(1) $X/\Gamma$ は長さ $\ell = 1$ である大きい対称性をもつ.
(2) $n \geq 3$ のとき, $X/\Gamma$ は局所等質リーマン計量を持たない. 特に $\Gamma$ がユニフォーム *lattice* になるような連結リー群は存在しない.
(3) $n = 2$ のとき, $X/\Gamma$ は局所等質リーマン多様体の構造を持つ. とくに $\Gamma$ がユニフォーム *lattice* になるような連結リー群がある.

$X/\Gamma$ は典型ファイバーが $k$-トーラス $T^k$ (例外ファイバーがユークリッド空間形), 底空間がコンパクト双曲空間 $\mathbb{H}^n/\Theta$ であるようなリーマン軌道束の構造を持つ. この $X/\Gamma$ は *Seifert fibering* と言及される. この定理は任意の実ランク 1 のコンパクト局所等質対称空間 $\Theta\backslash G/K$ に対し $H^2(\Theta, \mathbb{Z}^k)$ が無限位数の元をもつときに適用される. 実際次のサポーティングを与えて, 研究成果の説明をここで終える.

**系 3.** 4 次元コンパクト非球形リーマン多様体 $X/\Gamma$ が存在してそれは 3 次元双曲多様体上のリーマン *infra-*可解ファイバータワー ( 長さ 1) となる. さらに $X/\Gamma$ はいかなる局所等質リーマン計量も許さない.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　4件）

| 1．著者名 | 4．巻 |
|---|---|
| Baues Oliver、Kamishima Yoshinobu | 27 |
| 2．論文標題 | 5．発行年 |
| Isometry groups with radical, and aspherical Riemannian manifolds with large symmetry, I | 2023年 |
| 3．雑誌名 | 6．最初と最後の頁 |
| Geom. Topol. | 1-50 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） | 査読の有無 |
| 10.2140/gt.2023.27.1 | 有 |
| オープンアクセス | 国際共著 |
| オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 該当する |

| 1．著者名 | 4．巻 |
|---|---|
| Y. Kamishima | 59(4) |
| 2．論文標題 | 5．発行年 |
| Quaternionic contact 4n+3-manifolds and their 4n-quotients | 2021年 |
| 3．雑誌名 | 6．最初と最後の頁 |
| Annals of Global Analysis and Geometry | 435-455 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） | 査読の有無 |
| 10.1007/s10455-021-09758-5. | 有 |
| オープンアクセス | 国際共著 |
| オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 該当する |

| 1．著者名 | 4．巻 |
|---|---|
| D. Alekseevsky, K. Hasegawa, Y. Kamishima | 234 |
| 2．論文標題 | 5．発行年 |
| Homogeneous Sasaki and Vaisman manifolds of unimodular Lie groups | 2021年 |
| 3．雑誌名 | 6．最初と最後の頁 |
| Nagoya Math. J. | 83-96 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） | 査読の有無 |
| 10.1017/nmj. 2019 | 有 |
| オープンアクセス | 国際共著 |
| オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 該当する |

| 1．著者名 | 4．巻 |
|---|---|
| O. Baues, Y. Kamishima | 70 |
| 2．論文標題 | 5．発行年 |
| Locally homogeneous aspherical Sasaki manifolds | 2020年 |
| 3．雑誌名 | 6．最初と最後の頁 |
| Differential Geom. Appl. | 1-41 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） | 査読の有無 |
| なし | 有 |
| オープンアクセス | 国際共著 |
| オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 該当する |

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

| |
|---|
| **1．発表者名**<br>Y. Kamishima |
| **2．発表標題**<br>On the fundamental groups of compact aspherical manifolds with parabolic structure |
| **3．学会等名**<br>国際研究集会, The Fourth Taiwan-Japan Joint Conference on　Differential Geometry（招待講演） |
| **4．発表年**<br>2023年 |

| |
|---|
| **1．発表者名**<br>Y. Kamishima |
| **2．発表標題**<br>A Note on Vanishing of Equivariant Cohomology of Proper Actions and Application to the Conformal and CR-automorphism Groups |
| **3．学会等名**<br>国際研究集会,, The 2nd Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry（招待講演） |
| **4．発表年**<br>2019年 |

| |
|---|
| **1．発表者名**<br>Y. Kamishima |
| **2．発表標題**<br>Geometric structures on contact Heisenberg nilpotent Lie group |
| **3．学会等名**<br>KAIST Geometric Structures Lecture Series (Korea)（招待講義）（招待講演） |
| **4．発表年**<br>2024年 |

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

## 6．研究組織

| | 氏名<br>（ローマ字氏名）<br>（研究者番号） | 所属研究機関・部局・職<br>（機関番号） | 備考 |
|---|---|---|---|
| 研究分担者 | 長谷川　敬三<br>(Hasegawa Keizo)<br>(00208480) | 新潟大学・人文社会科学系・フェロー<br>(13101) | |

## 7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
| --- | --- |