

令和 5 年 6 月 22 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03287

研究課題名(和文) レンズ空間内の結び目に関する補空間予想の研究

研究課題名(英文) On the complement conjecture for knots in lens spaces

研究代表者

市原 一裕 (ICHIHARA, Kazuhiro)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：00388357

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主な研究課題は、最も基本的な3次元多様体である3次元球面を拡張するクラスであるレンズ空間の中の結び目に焦点を当て、結び目理論研究の基礎となる問題「結び目補空間問題：同相な補空間をもつ結び目はいつ同値となるか」にアプローチすることであった。特に、先行研究で重要な役割を果たしている、結び目に沿った同値でない矯飾的手術(同相な多様体対を生成するデーン手術)の研究に焦点を当てて研究を進めた。研究成果として、この問題に対するいくつかの部分的解決を得た。また、この研究をきっかけに、国内外において新たな研究の進展が得られていることも間接的には研究成果と言えるものと考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間内の結び目を数学的に研究する際、その補空間に着目することが多くなされている。実際、結び目が同値(連続変形でうつりあう)ならば補空間は同相(位相幾何において等しい)ということが容易にわかる。しかし、その逆、補空間が同相ならば結び目が同値になるか？という問題は自明でなく、長い間、未解決問題であった。1980年代にこの問題は最も基礎的な3次元球面内の結び目については肯定的に解決されたが、一般の3次元多様体内の結び目については現在も未解決である。本研究では、レンズ空間と呼ばれるクラスの3次元多様体内の結び目についてこの問題を研究し、いくつかの部分的解決を得た。

研究成果の概要(英文)：The main subject of this research is to consider the problem asking when the complement of a knot determines the type of the knot. This is one of the fundamental problems in Knot theory. The problem was solved for knots in the 3-sphere in the late 1980's. In this research, we focused on knots in lens spaces, which give a simple class of 3-manifolds including the 3-sphere. For the problem, to study the operation to create a 3-manifold, called Dehn surgery, has played quite an important role. In fact, the main part of this research is focused on cosmetic Dehn surgeries, which generate homeomorphic manifold pairs. As a research result, several partial solutions to this problem were obtained. In addition, the fact that this research has led to new advances in research both in Japan and overseas can be regarded as an indirect result of our research.

研究分野：数物系科学

キーワード：結び目 レンズ空間 デーン手術

### 1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間もしくは3次元球面内の結び目は、低次元トポロジーにおける重要な研究対象であるだけでなく、余次元2の埋め込まれた部分多様体の研究として様々な幾何学となっており、さらに近年では、高分子化学やDNA解析との関連もつくことから、より盛んに研究されている(いわゆる「結び目理論」)。この結び目理論のおよそ100年の歴史の中で、最も価値のある成果の一つとして「結び目補空間定理」(Gordon-Luecke, 1989)が挙げられる。これは「補空間が同相な3次元球面内の結び目は同値である(連続変形でうつり合う)」ことを主張する。一方で、より一般の3次元多様体内の結び目については、全く同じ主張は成り立たないことが知られている。したがって、次の問題が自然に考えられる。

結び目補空間問題: 同相な補空間をもつ結び目はいつ同値となるか。

言い換えれば、この問題は3次元多様体内の結び目の同値性と結び目補空間の同相性にはどんな関係があるかを問うている。

この問題は結び目理論において基礎的かつ重要な問題ではあるが未解決であり、多くの研究者が様々なアプローチから取り組んでいる。特に近年では、低次元トポロジーにおける革新的な理論であるヒーガードフレアホモロジー理論からのアプローチが強力に進められている。

### 2. 研究の目的

上記の結び目補空間問題について、向き付け可能性などの適切な仮定のもとで、Gordon-Lueckeによる結び目補空間定理の拡張が成り立つことが予想されている(一般化された結び目補空間予想)。そしてこの予想は、結び目補空間定理の証明の中で使われたデーン手術という操作に関する次の予想と同値である:

矯飾的手術予想: 結び目に沿った同値でないデーン手術によっては(向きも込めて)同相な3次元多様体は生成されないだろう。

ここで、同相な3次元多様体を生成するデーン手術の対を、結び目に沿った矯飾的手術(cosmetic surgery)と呼んでいる。

この予想は近年、3次元多様体の新しい不変量であるヒーガードフレアホモロジー理論などを用いて盛んに研究されているが、まだ完全解決への道筋はほとんど得られていない。

一方で、向き付け可能性を仮定しない一般の場合では、同値でないデーン手術によって(逆向きに)同相な3次元多様体対が生成されることがありうる。従ってこの場合には、そのようなデーン手術を許容する結び目の特徴づけの研究が進められている。

このような研究背景のもとで、本研究の具体的な目的を次のように設定する。

レンズ空間内の結び目に沿った同値でない矯飾的手術の分類を与えること。

より具体的には、これらの不変量などを組み合わせて用いることにより、次の2点を明らかにすることを目指す。

(1) レンズ空間内の結び目に関して矯飾的手術予想が成り立つこと、つまり、レンズ空間内の任意の非自明な結び目が純矯飾的手術(向きも込めて同相な3次元多様体は生成する手術)を許容しないこと

(2) レンズ空間内のどのような結び目が、対掌矯飾的手術(逆向きの3次元多様体対を生成する手術)を許容するかということ

### 3. 研究の方法

本研究では、3次元多様体内の結び目に関する結び目補空間問題に、研究代表者がこれまでに培ってきた様々な研究技法を組み合わせ融合的にアプローチしていく。実際、研究代表者はこれまで、3次元球面内の結び目に沿った矯飾的手術について、次のような種々の幾何構造や不変量を用いた研究手法を用いて研究を進めてきた。

結び目補空間の双曲幾何構造、モンテシノス・トリック(結び目に沿ったデーン手術と2重巡回被覆空間との関係)、基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間を用いて定義される $SL(2, \mathbb{C})$ キャッソン不変量、3次元多様体の有限型不変量、など。

### 4. 研究成果

(1) 有理ホモロジー球面の結び目に沿った矯飾的手術について:

レンズ空間を拡張したクラスである有理ホモロジー球面内の結び目について、それがホモロジーカルに自明でないならば補空間によって決定される、つまり、同相な補空間をもつそのような結び目が同値となる条件を与えることができた。これにより具体的には、例えば、レンズ空間内の1次元ホモロジー群の生成元を代表するような全ての結び目、および、1次元ホモロジー群の位数が7より大きい素数であるような非双曲的有理ホモロジー球面内の全ての双曲的結び目は、全て補空間で決定されることを示すことができた。(斎藤敏夫氏との共同研究)

これらの結果は、デーン手術理論と古典的なホモロジー群の表示を用いるものであり、とりわけ斬新なものではないが、近年に盛んに研究が進められているヒーガードフレアホモロジーなど

を用いた先行研究の結果(ホモロジー的に自明な結び目に関する結果)を補完するようなものになっている。

また、この研究をきっかけに、国内外において新たな研究の進展が得られていることも間接的には研究成果と言えるものと考えている。

(2) レンズ空間内の結び目に沿った対掌矯飾的手術について：

3次元球面内の結び目および絡み目のタイプを変えないバンド付加(banding)について、様々な例を構成し、それを元に対掌矯飾的手術を許容するが、補空間が鏡像対称性を持たない双曲結び目の例を初めて構成した。(正井秀俊氏、鄭仁大氏との共同研究)

これはおよそ20年前に提起された予想の反例を与えるものであった。

またこの研究の中でも観察した、レンズ空間内の双曲結び目で補空間が鏡像対称性を持つよく知られた例について、バンド付加を用いて表すことにより、そのメカニズムを明らかにし、それを含む無限族を構成することもできた。(鄭仁大氏、谷山公規氏との共同研究)

一方で、3次元球面内の結び目に沿った対掌矯飾的手術について、主にキャッソン不変量を用いての障害を得た。それらを用いて、3次元球面内の種数1の交代的結び目に沿った対掌矯飾的手術の完全分類を得ることができた。(伊藤哲也氏、斎藤敏夫氏との共同研究)

(3) 3次元球面内の結び目に沿った純矯飾的手術について：

まず、3次元球面内の結び目が純矯飾的手術を許容するための、最もよく知られた結び目の多項式不変量であるジョーンズ多項式を用いた条件を得た。(Zhongtao Wu氏との共同研究)

これは、3次元多様体の有限型不変量に関する研究をもとにしたものであり、また知られていたキャッソン不変量による条件の一般化とみなせるものである。さらに、この研究を元に、3次元多様体の有限型不変量を用いた矯飾的手術の研究が国内外で広くなされるようになったことも大きな成果であると考えている。

さらに上記の研究成果を基にして、3次元球面内の非常によく知られたクラスである二橋結び目について、それらに沿った純矯飾的手術の完全分類を得た。これは、それまで知られていた純矯飾的手術に関する様々な研究結果を組み合わせ得られたものであり、ある意味で現時点での到達点とも言える成果である。(Thomas Matman氏、鄭仁大氏、斎藤敏夫氏との共同研究)

この結果は、3次元球面内の結び目に関する結果であるが、上記のレンズ空間内の結び目についての研究目標に向けて、重要なステップとなりうるものと考えられる。

(4) 関連する基礎研究

その他、関連する研究成果として、次の結果を得た。

3次元球面内の双曲的結び目について、その結び目群の任意の非自明な元に対し、その元を自明化するデーネ手術が高々有限個であることを示した。

3次元閉多様体が分離的圧縮不可能曲面を含み、かつ強既約ヒーガード分解を許容するとき、そのヒーガード曲面の部分曲面として圧縮不可能曲面が見つかることを示した。

整数彩色可能なトーラス絡み目の標準図式について、それが許容する整数彩色の最小彩色数を決定し、そのような整数彩色の分類を与えた。

ランダムな空間グラフの4つのモデルについて、そのいずれのモデルにおいても、その頂点数を増加させていくとき、そのランダムグラフが結び目内在的である確率が1に収束することを示した。

レンズ空間内の種数1の双曲的ファイバー結び目で、全ての整数手術が左順序づけ可能な基本群を持つ3次元多様体を生成するものを決定した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 2件）

|  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1. 著者名<br>Kazuhiro Ichihara and Toshio Saito                             | 4. 巻<br>59                      |
| 2. 論文標題<br>Knots in homology lens spaces determined by their complements | 5. 発行年<br>2022年                 |
| 3. 雑誌名<br>Bulletin of the Korean Mathematical Society                    | 6. 最初と最後の頁<br>869 ~ 877         |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.4134/BKMS.b210503                         | 査読の有無<br>有                      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)                                   | 国際共著<br>-                       |
| 1. 著者名<br>Ichihara Kazuhiro, Jong In Dae, Mattman Thomas W, Saito Toshio | 4. 巻<br>21                      |
| 2. 論文標題<br>Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries           | 5. 発行年<br>2021年                 |
| 3. 雑誌名<br>Algebraic & Geometric Topology                                 | 6. 最初と最後の頁<br>2411 ~ 2424       |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.2140/agt.2021.21.2411                     | 査読の有無<br>有                      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                   | 国際共著<br>該当する                    |
| 1. 著者名<br>ICHIHARA Kazuhiro, ITO Tetsuya, SAITO Toshio                   | 4. 巻<br>44                      |
| 2. 論文標題<br>Chirally Cosmetic Surgeries and Casson Invariants             | 5. 発行年<br>2021年                 |
| 3. 雑誌名<br>Tokyo Journal of Mathematics                                   | 6. 最初と最後の頁<br>1 ~ 24            |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.3836/tjm/1502179325                       | 査読の有無<br>有                      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                   | 国際共著<br>-                       |
| 1. 著者名<br>Ichihara Kazuhiro, Nakae Yasuharu                              | 4. 巻<br>30                      |
| 2. 論文標題<br>Integral left-orderable surgeries on genus one fibered knots  | 5. 発行年<br>2021年                 |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Knot Theory and Its Ramifications                   | 6. 最初と最後の頁<br>2150018 ~ 2150018 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1142/S0218216521500188                    | 査読の有無<br>有                      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                   | 国際共著<br>-                       |

|  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1. 著者名<br>Ichihara Kazuhiro, Ishikawa Katsumi, Matsudo Eri             | 4. 巻<br>29                      |
| 2. 論文標題<br>Minimal coloring numbers on minimal diagrams of torus links | 5. 発行年<br>2020年                 |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Knot Theory and Its Ramifications                 | 6. 最初と最後の頁<br>2050059 ~ 2050059 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1142/S0218216520500595                  | 査読の有無<br>有                      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                 | 国際共著<br>-                       |

|  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1. 著者名<br>Ichihara Kazuhiro, Mattman Thomas W.         | 4. 巻<br>29                      |
| 2. 論文標題<br>Most graphs are knotted                     | 5. 発行年<br>2020年                 |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Knot Theory and Its Ramifications | 6. 最初と最後の頁<br>2071003 ~ 2071003 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1142/S0218216520710030  | 査読の有無<br>有                      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                 | 国際共著<br>該当する                    |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Ichihara Kazuhiro, Ozawa Makoto, Hyam Rubinstein J.                                      | 4. 巻<br>264           |
| 2. 論文標題<br>Decomposing Heegaard splittings along separating incompressible surfaces in 3-manifolds | 5. 発行年<br>2019年       |
| 3. 雑誌名<br>Topology and its Applications  | 6. 最初と最後の頁<br>21 ~ 26 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.topol.2019.06.022  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>該当する          |

|   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Ichihara Kazuhiro, Motegi Kimihiko, Teragaito Masakazu          | 4. 巻<br>264             |
| 2. 論文標題<br>Vanishing nontrivial elements in a knot group by Dehn fillings | 5. 発行年<br>2019年         |
| 3. 雑誌名<br>Topology and its Applications                                   | 6. 最初と最後の頁<br>223 ~ 232 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.topol.2019.06.023                   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                    | 国際共著<br>-               |

|  |                           |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名<br>Ichihara Kazuhiro, Wu Zhongtao                   | 4. 巻<br>27                |
| 2. 論文標題<br>A note on Jones polynomial and cosmetic surgery | 5. 発行年<br>2019年           |
| 3. 雑誌名<br>Communications in Analysis and Geometry          | 6. 最初と最後の頁<br>1087 ~ 1104 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.4310/CAG.2019.v27.n5.a3     | 査読の有無<br>有                |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                     | 国際共著<br>該当する              |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Ichihara K., Jong I. D., Masai H.    | 4. 巻<br>55              |
| 2. 論文標題<br>Cosmetic banding on knots and links | 5. 発行年<br>2018年         |
| 3. 雑誌名<br>Osaka Journal of Mathematics         | 6. 最初と最後の頁<br>731 ~ 745 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>なし                 | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)         | 国際共著<br>-               |

|  |                           |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名<br>Ichihara K., Jong I. D., Taniyama K.   | 4. 巻<br>39                |
| 2. 論文標題<br>Achiral 1-Cusped Hyperbolic 3-Manifolds Not Coming from Amphicheiral Null-homologous Knot Complements | 5. 発行年<br>2018年           |
| 3. 雑誌名<br>Lobachevskii Journal of Mathematics  | 6. 最初と最後の頁<br>1353 ~ 1361 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1134/S199508021809038X  | 査読の有無<br>有                |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-                 |

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 5件)

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>市原一裕   |
| 2. 発表標題<br>Computations of invariants for knots not to have purely cosmetic surgeries |
| 3. 学会等名<br>新KOOKセミナー (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2022年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>市原一裕  |
| 2. 発表標題<br>Knots in homology lens spaces determined by their complements |
| 3. 学会等名<br>研究集会「拡大K00Kセミナー 2021」   |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>市原一裕  |
| 2. 発表標題<br>Remarks on chirally cosmetic surgeries on knots |
| 3. 学会等名<br>研究集会「東北結び目セミナー 2021」                            |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiro Ichihara   |
| 2. 発表標題<br>Coloring links by symmetric group of order 3                |
| 3. 学会等名<br>The 17th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|                                   |
|-----------------------------------|
| 1. 発表者名<br>市原一裕                   |
| 2. 発表標題<br>双曲デーン手術定理とその精密化 (サーベイ) |
| 3. 学会等名<br>微分トポロジー '22 (招待講演)     |
| 4. 発表年<br>2022年                   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>市原一裕   |
| 2. 発表標題<br>A note on knots in lens spaces determined by their complements |
| 3. 学会等名<br>研究集会「拡大K00Kセミナー 2020」  |
| 4. 発表年<br>2020年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>市原一裕  |
| 2. 発表標題<br>結び目に沿った矯飾の手術について (On cosmetic surgery on knots) |
| 3. 学会等名<br>第67回 トポロジーシンポジウム・オンライン (招待講演)                   |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiro Ichihara  |
| 2. 発表標題<br>A note on knots in lens spaces determined by their complements |
| 3. 学会等名<br>The 16th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)    |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>市原一裕   |
| 2. 発表標題<br>Complete exceptional surgeries on two-bridge links |
| 3. 学会等名<br>拡大K00Kセミナー 2019                                    |
| 4. 発表年<br>2019年   |



|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiro Ichihara   |
| 2. 発表標題<br>Minimal coloring numbers on minimal diagrams of torus links |
| 3. 学会等名<br>Knots in Tsushima 2019 ( 国際学会 )                             |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiro Ichihara   |
| 2. 発表標題<br>Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries           |
| 3. 学会等名<br>The 15th East Asian Conference on Geometric Topology ( 国際学会 ) |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>市原一裕   |
| 2. 発表標題<br>Minimal coloring numbers of $Z$ -colorable links |
| 3. 学会等名<br>研究集会 Intelligence of Low-dimensional Topology    |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiro Ichihara                                      |
| 2. 発表標題<br>Cosmetic surgeries on knots                            |
| 3. 学会等名<br>International Congress of Mathematicians 2018 ( 国際学会 ) |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|                                   |
|-----------------------------------|
| 1. 発表者名<br>市原一裕                   |
| 2. 発表標題<br>3次元多様体の双曲性判定           |
| 3. 学会等名<br>「精度保証付き数値計算の基礎」チュートリアル |
| 4. 発表年<br>2018年                   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>市原一裕   |
| 2. 発表標題<br>A lower bound on the number of diagonals for polyhedra |
| 3. 学会等名<br>研究集会『トポロジーとコンピュータ 2018』                                |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|                                    |
|------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>市原一裕                    |
| 2. 発表標題<br>Most graphs are knotted |
| 3. 学会等名<br>研究集会『結び目の数理』            |
| 4. 発表年<br>2018年                    |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>市原一裕  |
| 2. 発表標題<br>Decomposing Heegaard splittings along separating incompressible surfaces in 3-manifolds |
| 3. 学会等名<br>日本数学会2019年度年会   |
| 4. 発表年<br>2019年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

|  | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

| 国際研究集会<br>Workshop "Topology and Computer 2019" | 開催年<br>2019年 ~ 2019年 |
|---|----------------------|
|---|----------------------|

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関                         |  |  |  |
|---------|---------------------------------|--|--|--|
| 米国      | カリフォルニア州立大学チコ校                  |  |  |  |
| オーストラリア | The University of Melbourne     |  |  |  |
| 中国      | Chinese University of Hong Kong |  |  |  |