

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03290

研究課題名（和文）一般のリーマン多様体のラプラシアン自己共役性ならびにリュービル性

研究課題名（英文）Essential selfadjointness of the Laplacian of Riemannian manifolds and Liouville property

研究代表者

正宗 淳（Masamune, Jun）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：50706538

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：Schmidt氏との共同研究ではシュレディンガー作用素に対する熱の保存則が成立するための必要十分条件を得た。Math Ann. から出版された。Hua氏とWojciechowski氏との共同研究では連続体、および離散グラフの上のラプラシアンの本質的自己共役性と L^2 リュービル性の関係を明らかにし、JFAAから出版された。Hinz氏とSuzuki氏との共同研究ではコーシー境界が極になっていることが本質的自己共役性の必要十分条件であることが示され、Non Linear Analysisから出版された。Inoue氏、Ku氏、Wojciechowski氏との共同研究ではハンバーガー定理の別証を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ラプラシアンの本質的自己共役性は対応するダイナミックスの境界や特異集合の付近での振る舞いが決定されることと同値であるため、解析学や幾何学における古くから研究されている基本的な問題であるが、未だ分かっていないことが多く、とりわけ、空間が非完備な場合には一般的な判断基準が存在しなかった。本研究課題ではこの問題に対して出来るだけ一般的な状況で「コーシー境界が極」であることと、本質的自己共役性の関係を調べることで迫った。連続体や離散空間を調べた結果、完全な回答を得られたわけではないが、今回調べた全てのケースにおいては、これらの概念は同地であることが明らかにされた。

研究成果の概要（英文）：In collaboration with Schmidt, we defined the conservation law of heat for the Schrodinger operator and obtained necessary and sufficient conditions for the Kasiminski-type to be satisfied. This result was published in Math Ann. In collaboration with Hua and Wojciechowski, we clarified the relation between essential self adjointness and L^2 Liouville property for the Laplacian on continua and discrete graphs, and the results were published by JFAA. In collaboration with Hinz and Suzuki, it was shown that for a noncomplete Riemannian manifold obtained by removing compact and closed sets from a complete space, a necessary and sufficient condition for essential self adjointness is that the Cauchy boundary is polar at some appropriate capacity. These results have been published in Non Linear Analysis. In collaboration with Inoue, Ku, and Wojciechowski, we gave another proof of the classical Hamburger's theorem for the Laplacian over natural numbers. We submitted this result to a journal.

研究分野：大域解析学

キーワード：ラプラシアン 本質的自己共役性 保存則 リュービル性

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の背景を説明するため、先ず問題の意義について説明し、次に研究開始当初の状況について説明する。空間内のダイナミクスは数学や諸科学における中心的研究テーマの一つであり、古来豊かな研究がなされてきた。ダイナミクスを決定する要素は空間の幾何学、ダイナミクスを生成するエネルギー、空間の特異集合の近傍や無限遠方での振る舞いがある。空間は連続体と離散空間に分類され、それぞれの代表的な例として、リーマン多様体とグラフがある。エネルギーの代表例な形態として運動エネルギーとポテンシャルエネルギーがあり、運動エネルギーに対応する作用素はラプラス作用素、そこにポテンシャルエネルギーが加わると、対応する作用素はシュレディンガー作用素である。空間の有界な領域における振る舞いはエネルギー / 作用素の形で決定され、空間の特異集合の付近や無限遠方におけるダイナミクスの振る舞いは作用素の自己共役拡張で決定される。作用素の自己共役拡張が唯一であるとき、作用素は本質的自己共役であるという。すなわち、空間の全ての有界な領域の情報（内部構造という）でダイナミクスが完全に決定されることと作用素が本質的自己共役であることは同値である。それゆえ、ラプラス作用素や、その一般化であるシュレディンガー作用素の本質的自己共役性を理解することは極めて重要である。

以下、研究開始当初（2018年）の状況について説明する。完備リーマン多様体のラプラシアンは本質的自己共役であることが1970年代から1980年代にかけてChernoffやStrichartzらにより様々な手法で示された。完備リーマン多様体のシュレディンガー作用素に関してはBraverman-Milatovic-Shubin（2002）の研究成果がある。完備グラフのラプラシアンは本質的自己共役であることは2013年にMasamune, et alにより証明された。すなわち、空間が連続体、離散空間であるに関わらず、ラプラシアンから生成されるダイナミクスの無限遠での振る舞いは、空間の内部構造で完全に決定されることが分かる。一方、非完備なリーマン多様体の場合は、本質的自己共役性の問題は格段に難しくなる。非完備の場合については、ユークリッド空間から一点を取り除いて得られる非完備空間に対するKatoらの研究成果、Colin de Verdiéによる多様体への一般化（GaffneyやCheeger, Li-Tianらによる本質的自己共役性より真に弱い研究成果）、Boscain-Prandiによる回転対称多様体に対する非完備多様体に対する研究成果がある。しかしながら、非完備なリーマン多様体の本質的自己共役性に関しては体系的な研究は成功しておらず、実質的に、リーマン多様体やグラフのラプラシアンが本質的自己共役であるための十分条件としては空間が完備であること以外には何も知られていない。

2. 研究の目的

1. において述べた通り、ラプラス作用素や、その一般化であるシュレディンガー作用素の本質的自己共役性を理解することは重要な課題であるにも関わらず、リーマン多様体やグラフのラプラシアンが本質的自己共役であるための十分条件としては空間が完備であること以外には殆ど何も知られていない。本研究課題では、一般の非完備リーマン多様体やグラフのラプラシアン、およびシュレディンガー作用素の本質的自己共役性とそれに関連する事項に関する理解を深めることを目標とした。より具体的には、(1) 一般の非完備リーマン多様体で定義されたディリクレ境界条件をもつシュレディンガー作用素により生成されるダイナミクスの保存則の特徴づけ、(2) 一般の非完備リーマン多様体や非完備グラフのラプラシアンの本質的自己共役性とL²-リュービル性（二乗可積分の調和関数は定数になる性質）との関係の解明、(3) 完備リーマン多様体やその一般化である距離測度空間の部分集合に関する容量の研究と、その応用として、これらの空間から閉部分集合を取り除いて得られる非完備な空間で定義されるラプラシアンの本質的自己共役性の決定することを目標にした。

3. 研究の方法

以下に、2. において説明した研究目的を達成するため研究目標 (1) (2) (3) の研究方法について説明する。

(1) について（従来から研究されてきた）ラプラシアンに関する先行研究を参考に研究を行う。ポテンシャルは粒子の消滅・生成として作用するため、シュレディンガー作用素により生成されるダイナミクスは古典的な意味では保存的ではない。それゆえ、先ず保存性の定義を適切に一般化することを試みる。次にラプラシアンの場合の保存則の特徴づけの一つであるカシミンスキー・テストを、ポテンシャル付きの場合に拡張することを試みる。最後にその一般化されたカシミンスキー・テストを用いて、シュレディンガー作用素により生成されるダイナミクスの保存則を決定する。

(2) について 対称作用素が本質的自己共役であることと、一般化された固有関数が自明であることが同値であることを用いて、スペクトルギャップがある（つまり、ポアンカレ定数が正である）状況下で、ラプラシアンの本質的自己共役性とL²-リュービル性の関係を明らかにすることを目指す。スペクトルギャップについてはグリーン関数と容量の関係を用いて空間に再

帰性がない場合を詳細に調べることとする。(2)については、空間はリーマン多様体とグラフを同時に扱うこととするが、共通する関数解析的な議論とそれぞれの空間に固有な性質を分けて議論をする予定である。

(3)について ラプラシアンの本質的自己共役性より真に弱い性質として、ラプラシアンのマルコフ拡張の一意性という概念が知られている。マルコフ拡張の一意性は空間の特異集合の容量が0、もしくは無限大であることで特徴付けられることが知られている。そこで、本質的自己共役性を特徴づける可能性がある容量を検討する。具体的にはポテンシャル関数を用いて定義する容量と従来用いてきた容量にラプラシアンから由来する量を追加した容量の二つを調べることとする。次に、これらの容量と本質的自己共役性の関係を明らかにし、容量が0になるための必要十分条件をフラクタル次元で得ることを目標とする。

4. 研究成果

上述した問題(1)～(3)に関連する研究成果として以下を得た。(1)については、一般化された保存則を定義し、また、それと一般化されたカシミンスキー・テストが同値であることを証明した。さらに、一般化されたカシミンスキー・テストを用いることで、従来の保存則の限界である体積増大条件を超えた多様体に対してもポテンシャルを調整することで一般化された保存則が成立することを示した。(2)については、ラプラシアンの本質的自己共役性と L^2 -リュービル性の関係を明らかにした。この結果は非常に一般的な状況でも成立するゆえ、この定理を基にしてリーマン多様体とグラフの両方に適用することで、(3)においてより一般的な状況で証明された結果をグリーン関数などにより具体的な証明を与えた。(3)については、リーマン多様体や距離測度空間上に2つの容量を定義して、それらが同値であることを示した。さらに、その一方の容量を用いてラプラシアンの本質的自己共役性を特徴付けし、また、もう一方の容量を用いて定量的な評価を得ることに成功した。これらの結果を合わせることで、ラプラシアンの本質的自己共役性が成立するための条件の特異集合のフラクタル次元で得ることができた。

以上の研究成果、および関連する結果は以下の査読付きの国際専門誌から発表された。

[Removable sets and \$L^p\$ -uniqueness on manifolds and metric measure spaces](#), Michael Hinz, Jun Masamune, Kohei Suzuki, *Nonlinear Analysis* 2023年

[Intrinsic ultracontractivity for domains in negatively curved manifolds](#), Hiroaki Aikawa, Michiel van den Berg, Jun Masamune, *Computational Mathematics and Function Theory* 2021年9月

[Essential self-adjointness and the \$L^2\$ -Liouville property](#), Bobo Hua, Jun Masamune, Radosław, K. Wojciechowski, *Journal of Fourier Analysis and Applications* 27 2021年3月

[A generalized conservation property for the heat semigroup on weighted manifolds](#), Jun Masamune, Marcel Schmidt, *Mathematische Annalen* 377 1673–1710 2020年

[\$H\$ -compactness of elliptic operators on weighted Riemannian manifolds](#), Helmer Hoppe, Jun Masamune, Stefan Neukamm, *Interdisciplinary Information Sciences* 25(2) 161–191 2019年

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hua, B; Masamune, J; Wojciechowski, R	4. 巻 -
2. 論文標題 Essential self-adjointness and the L^2 -Liouville property	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Fourier Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-019-01888-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Masamune, J; Schmidt, M	4. 巻 17
2. 論文標題 A generalized conservation property for the heat semigroup on weighted manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1,36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-019-01888-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Helmer Hoppe, Jun Masamune, Stefan Neukamm	4. 巻 25
2. 論文標題 H-compactness of elliptic operators on weighted Riemannian manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Interdisciplinary Information Sciences	6. 最初と最後の頁 161,191
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4036/iis.2019.B.03	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroaki Aikawa, Michiel van den Berg, Jun Masamune	4. 巻 21
2. 論文標題 Intrinsic ultracontractivity for domains in negatively curved manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Hiroaki Aikawa, Michiel van den Berg, Jun Masamune, Computational Mathematics and Function Theory	6. 最初と最後の頁 797,824
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40315-021-00402-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Michael Hinz, Jun Masamune, Kohei Suzuki	4. 巻 234
2. 論文標題 Removable sets and L^p -uniqueness on manifolds and metric measure spaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 1,40
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2023.113296	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 正宗淳
2. 発表標題 非完備リーマン多様体のラプラシアン自己共役拡張について
3. 学会等名 東京確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 正宗淳
2. 発表標題 L2 Liouville property and its applications on Riemannian manifolds
3. 学会等名 東北大学応用数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正宗淳
2. 発表標題 L2 Liouville property and its applications on Riemannian manifolds
3. 学会等名 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Jun Masamune
2. 発表標題 Capacities and essential self adjointness of the Laplacian
3. 学会等名 Geometry and Probability 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 正宗淳
2. 発表標題 リュービル性と関連する話題
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正宗淳
2. 発表標題 L2 Liouville property and it's applications on Riemannian manifolds
3. 学会等名 応用解析研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正宗淳
2. 発表標題 L2 Liouville property and it's applications on Riemannian manifolds
3. 学会等名 東北大学 応用数理解析セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Jun Masamune
2. 発表標題 Generalized conservation property of Brownian motion with killing inside
3. 学会等名 2018 SPRING PROBABILITY WORKSHOP (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関