様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月　７日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３２９３

研究課題名（和文）ホモトピー代数の表現論と幾何学

研究課題名（英文）Representation theory of homotopy algebras and geometry

研究代表者
梶浦　宏成（Kajiura, Hiroshige）

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：３０４４７８９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：複素多様体側がトーリック多様体の場合のホモロジー的ミラー対称性のSYZトーラスファイバー束による定式化を提案した。この定式化による，トーリック多様体が複素射影空間の場合などの場合のホモロジー的ミラー対称性を示した。ホモロジー的ミラー対称性はミラー対称なシンプレクティック多様体と複素多様体の組に対し，その複素多様体上の連接層の導来圏とシンプレクティック多様体上の深谷圏の導来圏の間の同値性である。トーリック多様体上の連接層の導来圏は例外的生成系を持つことから，これらの導来圏はすべて順序付きA∞圏から生成される導来圏の例となっている。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ホモロジー的ミラー対称性は，シンプレクティック多様体と複素多様体という異なる２つの幾何の上で定まる三角圏の同値性を主張するものである。この一見異なる幾何学の間に対応があることが興味深く，現在でもホモロジー的ミラー対称性が成り立つような様々な例について議論されている。一方で，なぜそれが成り立つか，という問いに関して決定的な結果は今のところ知られていない．現在この問の解決に一番近いと思われるのがSYZトーラス束によるミラー対の構成に基づく議論であるが，この方向性では解決すべき主張の厳密な証明が難しい状況にある．本研究ではこれを複素側がトーリック多様体に限定した場合に解決する方法を提案している．

研究成果の概要（英文）：Homological mirror symmetry conjecture states that the derived category of coherent sheaves on a complex manifold and the derived category of Fukaya category of the mirror dual symplectic manifold are equivalent to each other as triangulated categories. We discuss the case where a complex manifold is a toric manifold and propose a formulation of a version of homological mirror symmetry based on SYZ torus fibrations.
We in particular show explicitly this version of homological mirror symmetry when a toric manifold is a complex projective plane, etc. The derived category of coherent sheaves on a toric manifold is known to have a full exceptional collection, which implies that the derived category is generated by a directed A-infinity category. Thus, our discussions as above are interesting, too, in the sense that we obtain many examples of triangulated categotries generated by directed A-infinity categories from geometry.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：ホモトピー代数　ミラー対称性　導来圏

１．研究開始当初の背景

超弦理論あるいは位相的弦理論の持つ対称性として発見されたミラー対称性は，幾何学的にはシンプレクティック多様体と複素多様体の間の双対性として定式化される．特に Kontsevich によって提案されたホモロジー的ミラー対称性は，この圏論的定式化である．シンプレクティック多様体上では深谷圏の導来圏，複素多様体上では連接層の導来圏を考えることができ，深谷圏と連接層の導来圏が三角圏同値となるようなシンプレクティック多様体と複素多様体の組が存在するという予想である．通常ではもともと他の意味でミラー対であるといわれているシンプレクティック多様体と複素多様体の組に対して，それらの上の深谷圏の導来圏と連接層の導来圏の同値性が様々な例で肯定的に議論されている．

深谷圏は一般に $A\infty$ 圏として定義され，これを連接層の導来圏と比べるためには $A\infty$ 圏を三角圏に置き換えたい．このために Kontsevich は $A\infty$ 圏から片側捻り複体の成す $A\infty$ 圏を考え，そのゼロ次のコホモロジーとして三角圏を構成する方法を提案した．上で述べた深谷圏の導来圏とはこのようにして深谷圏から得られる三角圏のことである．一方，複素多様体側では自然に正則直線束，あるいは正則ベクトル束の成す DG 圏を構成することができる．DG 圏は $A\infty$ 圏の特別な場合，つまり高次の積が自明な $A\infty$ 圏であり，上の方法によってこれから三角圏を得ることができる．特に，多くの良い例において連接層の導来圏が正則直線束の導来圏として実現できることが知られている．

一方，ミラー対称性がなぜ成り立つのかという問に答えるものとして最も期待されているのが Strominger-Yau-Zaslow (SYZ) によるミラー対のトーラスファイバー束による構成である．シンプレクティック多様体と複素多様体のミラー対を，同じ底空間上の互いに双対なトーラス束として構成しようというものである．この構成は，さらにシンプレクティックトーラスファイバー束のラグランジュ切断とそのミラー双対な複素多様体上の正則直線束の間の対応を提案している．

つまり，これによって深谷圏の対象の一部と正則直線束の成す DG 圏の対象の間の自然な対応が与えられる．この方向性でホモロジー的ミラー対称性を議論しようという試みが Kontsevich-Soibelman によって提案されている．この手法では，ラグランジュ切断の深谷圏と正則直線束の DG 圏の間の $A\infty$ 同値を示すことの帰結としてホモロジー的ミラー対称性が示されることとなる．一般にはシンプレクティック多様体，複素多様体をトーラスファイバー束で実現するには特異ファイバーが必要となり，それによる様々な補正が必要となるので，現状はこの方針でホモロジー的ミラー対称性がすべて証明されるといった状況ではない．

２．研究の目的

本研究ではこの Kontsevich-Soibelman の方向性でホモロジー的ミラー対称性が成り立つ具体例を構成することをはじめの目的とする．このことは単にあるミラー対がホモロジー的対称性を満たすことが分かるというだけでなく，両者の圏の間の同値関手を自然に構成することができるという利点がある．また，これらの方法ではラグランジュ切断の深谷 $A\infty$ 圏や直線束の DG 圏を構成し，その三角圏として対応する幾何学の情報を抽出する．より正確には，幾何学から $A\infty$ 圏の片側捻り複体の成す $A\infty$ 圏を構成し，そのゼロ次のコホモロジーとして三角圏を構成する．このとき，この幾何学から片側捻り複体の $A\infty$ 圏を構成する操作，そのゼロ次のコホモロジーをとる操作がどれほど幾何学の情報を残しているか（あるいは失っているか）という２つの自然な問にも目を向けていきたい．後者の問は純粋に代数的な問題としても重要である．前者の問についても理解を進めるためにまずこの方針で証明できるホモロジー的ミラー対称性の具体例を増やすことをはじめの研究目的とする．

３．研究の方法

上述のように，この方針でホモロジー的ミラー対称性を示すためには，ラグランジュ切断の深谷 $A\infty$ 圏と正則直線束のＤＧ圏の間の $A\infty$ 圏としての同値関手を，SYZ による対象の間の対応を拡張することによって構成する必要がある．一般に，深谷圏のある程度よいクラスの対象達の上の $A\infty$ 構造は極小，つまり微分が自明となっており，これらの対象に対応する正則直線束達から成る部分 DG 圏の極小模型として得られることが期待できる．しかし，一般に DG 圏の極小模型は一意的ではない．$A\infty$ 同型を除けば一意的であるが，この $A\infty$ 同型な物の中の特別なひとつが深谷圏となるわけである．一方，一般にＤＧ圏や $A\infty$ 圏からその極小模型を得る方法としてホモロジー的摂動理論と呼ばれるものがある．本研究ではこの方法をホモロジー的ミラー対称性を示す上での基本的な手段としたい．特に，正則直線束の成すＤＧ圏を，それと同値なＤＧ圏であって，直接ホモロジー的摂動理論を適用したものとして直接深谷圏が得られるようなものにおきかえるという手法を基本的な手段とする．

この DG 圏の取り換えが本研究計画の技術的な核となる部分である．例えば滑らかな多様体上

の微分形式の成すDG代数を考えるとする．これに対してホモロジー的摂動理論を適用するときにはまずドラームコホモロジーの代表元を決定する外微分作用素のホモトピー作用素を構成する．つまり，ドラーム複体と，ドラームコホモロジー（を自明な複体と思ったもの）の間の擬同型を誘導するホモトピー作用素を構成する．このときのコホモロジーの代表元として，調和関数的なものを考えるかわりに,サイクルに台を持つ元を選びたいとすると,微分形式では収まらず,カレントを導入することとなる．しかし，微分形式の空間をカレントの空間まで拡張すると積構造を定めることができないのでDG代数として定式化できない．よって，必要最低限のカレント的な元を形式的に付け加えたものでDG代数として閉じるものを考えたい．このような考えの拡張が本研究の核となる方針である．複素多様体上の正則直線束のDG圏は，その複素多様体がトーラスファイバー束として実現できているとき，その底空間上の微分形式のDG代数の適切な拡張としての構造を持つ．そして正則直線束のDG圏にホモロジー的摂動理論を適用して深谷圏を得るためには,その射のコホモロジーの代表元としてカレント的なものを選ぶ必要がある.実際,カレントの台は，深谷圏側の対応する２つのラグランジュ切断の共通部分の底空間への射影となっている．このようなDG圏の取り換えがうまく機能するような具体例を増やしていくことを考える．

４．研究成果

上述の手法により，まず２次元トーラスのホモロジー的ミラー対称性を証明した．これはホモロジー的ミラー対称性についての最も基本的な例のひとつであるが,「ホモロジー的ミラー対称性が示された（肯定的に議論された)」といわれているときに実際に何が（どのレベルで）示されているかはまちまちである．本研究では，この手法により，特にシンプレクティックトーラス側のアファインラグランジュ部分多様体の深谷圏の A_∞構造を完全に決定することができている．

このトーラスの場合，例えば複素側は複素構造の入ったトーラスであり，広い意味でカラビ・ヤウである．つまり，この上の連接層の導来圏はカラビ・ヤウ圏と呼ばれる構造を持つ．n次元カラビ・ヤウ圏において，２つの対象X,Yの間に射X→Yがあると，逆向きの射Y→X[n]が存在する．ここで[n]は三角圏における次数をnずらす操作を意味する．これはきれいな構造であるともいえるが，意外にやっかいな性質でもある．実際，例えば対象 $X_1,X_2,X_3,\cdots$の間に逆向きの（非自明な）射，つまり i>j のときは $X_i\to X_j[*]$は必ずないというような状況はカラビ・ヤウ圏の場合異なる対象の間に（次数付きの）射が全く飛んでいないという状況しかありえない．表現論的な観点からみて，順序付きの対象の集まり($X_1,X_2,..$)の間に逆向きの射がないという条件は状況をかなり単純にする．このような対象の集まりの例として例外的対象系（あるいは例外対象列）などと呼ばれるものがあるが，その中で特に次数がゼロの射しかないものは強例外的対象系と呼ばれ，これらで生成される充満部分三角圏は，強例外的対象系から定まる道代数の表現の圏の導来圏と同値となることが知られている．

ある三角圏全体がこのような（強）例外的対象系で生成されている場合はかなり性質がよい．例えばある A_∞圏の導来圏として得られる三角圏が例外的対象系で生成されている場合，その A_∞圏の片側捻り複体の圏（つまりゼロ次のコホモロジーがその三角圏となるもの）の，例外的対象系から成る充満部分 A_∞圏の高次の積は必ず有限で止まることになる．一般にホモロジー的摂動理論を適用して深谷圏を得るという Kontsevich-Soibelman 流の方針では Fukaya-Oh のモースホモトピーの圏の適切な一般化を経由する．このモースホモトピーの圏の A_∞構造を一般的な状況で完全に定義することは非常に困難であり，この種の有限性は（少なくともそのような生成系から成る充満部分 A_∞圏を考える限りは）この困難を回避できることが期待できる．しかし，上で述べた理由から，カラビ・ヤウ圏は例外的対象系で生成されることはない．（実際はそれ以前にカラビ・ヤウ圏のすべての対象Xが恒等射X→Xに対応する射X→X[n]を持つことから例外的対象に成りえず，カラビ・ヤウ圏は例外的対象系で生成されないことが分かる．）

よって，次の研究として複素多様体側がトーリック多様体である場合のホモロジー的ミラー対称性の研究に着手した．実際，Kawamata の結果によりトーリック多様体（ケーラー多様体，つまり複素多様体でもありシンプレクティック多様体にもなる）の連接層の導来圏は例外的生成系を持つことが知られている．二木昌宏氏との共同研究によって，ホモロジー的ミラー対称性の Kontsevich-Soibelman 流のアプローチの，複素多様体がトーリック多様体の場合の定式化を行った．複素多様体側がカラビ・ヤウではないので定式化自体はいろいろと変更を行う必要がある．この定式化で，トーリック多様体が複素射影空間やそれらの直積の場合，またヒルツブルグ曲面 F_1 の場合にホモロジー的ミラー対称性が成り立つことを示した．現在では中西隼斗氏によってトーリック多様体がトーリックファノ曲面の場合とすべてのヒルツブルグ曲面の場合でも成り立つことが示されている．今後さらに複雑なトーリック多様体の例を扱うことができるようになれば，それは上の意味で有限性を持った A_∞圏の導来圏の例となり，表現論の観点からも興味深いものとなることが期待できる．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 Kajiura Hiroshige	4．巻 160
2．論文標題 Fukaya categories of two-tori revisited	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6．最初と最後の頁 103965～103965
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2020.103965	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Futaki Masahiro、Kajiura Hiroshige	4．巻 62
2．論文標題 Homological mirror symmetry of CPn and their products via Morse homotopy	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 032307～032307
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/5.0029165	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Hiroshige Kajiura	4．巻 25
2．論文標題 Cyclicity in homotopy algebras and rational homotopy theory	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Georgian Mathematical Journal	6．最初と最後の頁 545--570
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/gmj-2018-0058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 Hiroshige Kajiura
2．発表標題 Wondering about an open-closed correspondence
3．学会等名 Workshop on String Field Theory and Related Aspects (online)（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2020年～2021年

1．発表者名 Hiroshige Kajiura
2．発表標題 Homological perturbation theory in homological mirror symmetry
3．学会等名 Homotopy Algebra of Quantum Field Theory and Its Application (online)（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2020年～2021年

1．発表者名 梶浦　宏成
2．発表標題 ホモトピー代数の幾何学への応用
3．学会等名 ポアソン幾何とその周辺2019（招待講演）
4．発表年 2019年～2020年

1．発表者名 梶浦　宏成
2．発表標題 有限次元A∞代数の表現論
3．学会等名 第63回代数学シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Aspects of Mirror Symmetry in Chiba 2019	2019年～2020年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関