

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03296

研究課題名(和文) 結び目の張る曲面の形と不変量のふるまい

研究課題名(英文) Forms of surfaces spanned by a knot and behaviors of invariants

研究代表者

平澤 美可三 (Hirasawa, Mikami)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00337908

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：結び目やそれが張る曲面の形の、結び目不変量に対する影響を調べた。曲面の形のアレクサンダー多項式の零点の分布への影響を調べ、交代結び目に関するホステ予想に対し、具体的な反例を構成したり、樹状絡み目の捻りで零点の位置が制御できる状況を定式化した。絡み目の曲面と多項式の解析から発展して、サーレム多項式を組織的に生み出す手法を開発した。絡み目のファイバー曲面に対するストーリングス捻り、ハーラー捻りを拡張して新しいファイバーを生み出せる捻りを定式化し、多項式への影響を調べた。強対合で不変なザイフェルト曲面の構成法を突き詰め、最小性を証明する手法を開発し、2橋結び目に対して最小種数を完全決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アレクサンダー多項式は結び目の性質を顕著に表し、また補空間の構造ともよく馴染む、大変興味深い対象である。ホステ予想により、係数よりもむしろ零点の分布にも意義があると認識されてきた。絡み目に拡張してアレクサンダー多項式の零点を調べる中で、サーレム多項式の新しい構成法に気づいた。サーレム多項式は整数論や代数幾何でも重要な対象であり、結び目との関連付けを行えた。強対合で不変なザイフェルト曲面の研究は3, 4次元において近年盛んに行われており、研究手法を貢献できたことにも意義がある。また古典的なファイバー曲面の研究にも新たな視覚化などで貢献できた。

研究成果の概要(英文)：We construct spanning surfaces for knots and examined the effect of their forms and deformations to the invariants of the knots. The shape of surfaces typically affects the distribution of the zeros of Alexander polynomials. We constructed explicit counter examples for the Hoste conjecture for alternating knots. Also, we recognized the phenomenon of the distribution of zeros being controlled by the twists in arborescent links. Study of the matrices of fiber surfaces lead us to the systematic construction of Salem polynomials. We generalized Stallings and Harer twists on fiber surfaces and examined their effect to the polynomials. We managed a constructive description of Seifert surfaces which are preserved by strong inversion of 2-bridge knots, and showed they realize the minimal equivariant genera. For that purpose we established a general method of showing the genus-minimality.

研究分野：幾何学

キーワード：結び目 絡み目不変量 多項式不変量 ファイバー曲面 アレクサンダー多項式 零点の分布

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

本研究のよりどころは、低次元トポロジーの一分野である結び目理論である。対象は素朴な結び目であるが、そこには豊富な代数的構造、幾何学的構造が見出され様々な研究が行われている。結び目、絡み目はまた、デーン手術を通じて3次元多様体の設計図とみなすこともでき、結び目の性質が、そこから得られる多様体の性質に反映、また結び目そのものがそれにまつわる三次元多様体の性質を備えている。また結び目は近年ではDNAやタンパク質といった生物分野にも応用されており、申請者の過去の研究も頻繁に応用されている。近年、物理分野でもトポロジーの考え方が重要視されてきている。

### 2. 研究の目的

三次元多様体(特に三次元球面)における絡まった閉曲線のことを結び目、またそれらの集まりを絡み目と呼び、それらの位相幾何学的な性質を研究対象とする。空間内の結び目を調べる手掛かりとして、境界付き曲面を考え、曲線としての結び目はその境界として出現していると見なす。曲面について、構成法、配置法、補空間の構造を調べ、それにより結び目の性質(幾何学的構造、多項式不変量の性質、その零点の分布、補空間の構造)を導き出す。特に、絡み目補空間の性質と曲面の性質がうまく馴染むクラスについて詳しく調べる。具体的に補空間かが円周上のファイバー束になるファイバー絡み目や、幾何学的性質と代数的性質がうまく連携する多項式不変量であるアレクサンダー多項式について、その零点の分布を調べる。更なる応用として、物理学者と協力してその観点を結び目理論に利用し、また結び目理論の物理現象への適用も目指す。

### 3. 研究の方法

結び目、曲面、多様体を、見えるか見えないギリギリの所から、見える形にし、対象物の位相的性質や不変量の振舞いを明確にする。曲面を具体的な対象としてマニピュレートし、それを通じて結び目やその不変量を調べる。多項式不変量であるアレクサンダー多項式においては、これまではその係数に注目することがほとんどであったが、いったん離れ多項式の零点集合を複素平面上で解析する。近年のコンピュータの発達によって、様々な実験を行い予想が立てられるようになってきた。多項式の零点の分布は解析学ではよく調べられているが、結び目のアレクサンダー多項式に注目し、その零点分布を結び目理論の観点から調べる。

### 4. 研究成果

・ホステ予想の反例の構成:

結び目の不変量であるアレクサンダー多項式について、その零点の分布を調べている。「交代結び目について、そのアレクサンダー多項式の零点の実部は-1より大きい」という予想がJ.ホステによって2002年に提唱され、様々な部分クラスについて結果が得られている。本研究では、石川勝己氏、鈴木正明氏との共同研究により、実際に交代結び目のホステ予想に対する反例を構成した。構成した最小のものは交点数が778、アレクサンダー多項式の次数は764であった。

・強可逆結び目の強対合で不変なザイフェルト曲面について:

2橋結び目は強可逆結び目であり、強対合の対称性がある。日浦涼太氏、作間誠氏との共同研究により、その対称性で保たれるザイフェルト曲面の最小種数を決定した。全ての状況について強対合不変種数を実現する曲面を具体的に構成した。結び目補空間全体ではなく、補空間を最小種数曲面の強対合による付によって切り開いた空間内での議論に帰着する発想を得て、縫い目付き多様体の議論により最小性の証明に成功した。

・結び目の村杉和による構成に於ける、貼付け円板のサイズについて:

ミシガン州立大学のA. Jared氏と、ザイフェルト曲面の村杉和、および村杉分解における振る舞いを調べた。任意の結び目3つに対し、その1つを他の2つの村杉和として表すことのできるザイフェルト曲面の構成法はすでに確立済みであったが、今回はその時の村杉和を行う貼り合せ多角形のサイズに関する考察を行なった。これまでの抽象的な構成ではサイズを無制限に大きくしていたが、単にザイフェルト曲面を見つけるだけでなく、より低いサイズで行うための様々な手法を開発し、そのサイズの上からと下からの評価を見出すことに成功した。

・ファイバー曲面の捻り操作による変形について:

ジュネーブ大学の Q・ホングラール氏との共同研究により, 絡み目のファイバー曲面を, それ上のループに沿って手術し, 新たなファイバー曲面を構成する手法を調べた. これまでに知られているストーリングス捻り, およびその一般化であるハーラー捻りを調べ, 更なる拡張を行い, またそれ以上の拡張は得られないことを証明した. この新たなツイストにより, これまで知られていたファイバー曲面やその変形操作についても新たな知見が得られた.

・樹状絡み目のアレクサンダー多項式の安定性について:

トロント大学の村杉邦男氏との共同研究により, ある種の樹状絡み目の零点は, “全て実数になる” (r-stable) または “全て実軸が単位円周上にある” (bi-stable) といった制御された形で出現することを証明した. アレクサンダー多項式の零点を調べるために, まず多項式そのものを計算する必要があり, 今回は一般的なスケイン漸化式ではなく, 有理式を経由する方法を確立した.

結び目, 絡み目とサーレムなアレクサンダー多項式について:

トロント大学の村杉邦男氏との共同研究により, bi-stable な中でも特に, サーレム性と呼ばれる, 円周上の根の他に実根が 2 点となる性質を扱った. サーレム多項式は数論では整数係数多項式のマラー測度の最小値問題として重要であり, 予想を実現する多項式は結び目のアレクサンダー多項式になっている. 今回, 2 橋絡み目にはそのようなクラスが豊富にあることが分かった. これは 2 橋結び目では極めて稀なことが, 絡み目では起こることを示している. アカンポによって導入された Divide の結び目についてもサーレムなアレクサンダー多項式をもつ結び目のクラスを発見した. これらの研究により, 係数列の中に等差数列が部分的に現れるという不思議な性質に注目する意義が見出され, アレクサンダー多項式以外でも興味深いサーレム多項式が構成できることが分かった.

・結び目補空間のファイブレーションの視覚化について:

Benjamin Bode 氏と結び目補空間のファイブレーションの構造に関する共同研究を行なった. 特に, ファイバー曲面の動きを具体的に視覚化するため, 均質的組紐で表されるファイバー絡み目に注目し, 鞍点の軌跡がなす組紐が自明組紐になる様に配置できる事を, 実際に視覚化することで示した. その際に, 組紐補空間のファイブレーションの視覚化として, これまでにない新しい手法を開発し, 一つの図式の上に時間遷移が読み取れる描画を行なった. これにより, ファイバー絡み目の不変量であるルドルフ不変量の振る舞いをより深く理解する手がかりが得られた.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 M. Hirasawa, R. Hiura and M. Sakuma	4. 巻 -
2. 論文標題 The equivariant genera of marked strongly invertible knots associated with 2-bridge knots	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 B. Bode and M. Hirasawa	4. 巻 11
2. 論文標題 Saddle point braids of braided fibrations and pseudo-fibrations	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 1-39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40687-024-00446-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 M. Hirasawa	4. 巻 2263
2. 論文標題 Construction and manipulation of Seifert surfaces in knot theory (a note in 2023)	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 21-38
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Hirasawa, R. Hiura and M. Sakuma	4. 巻 -
2. 論文標題 Invariant Seifert surfaces for strongly invertible knots	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 IRMA Lect. Math. Theor. Phys. Essays in Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Hirasawa and K. Murasugi	4. 巻 28
2. 論文標題 Stable Alexander polynomials of arborescent links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Jour. Knot Theory and its Ramifications	6. 最初と最後の頁 21pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216519400170	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M.Hirasawa, K.Ishikawa and M.Suzuki	4. 巻 253
2. 論文標題 Alternating knots with Alexander polynomials having unexpected zeros	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its applications	6. 最初と最後の頁 48-56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 M. Hirasawa
2. 発表標題 The equivariant genera of marked strongly invertible knots associated with 2-bridge knots
3. 学会等名 SEMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 M. Hirasawa
2. 発表標題 Construction and manipulation of Seifert surfaces in knot theory
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 M. Hirasawa
2. 発表標題 2橋結び目の強対合で不変なザイフェルト曲面の最小種数
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 M. Hirasawa
2. 発表標題 Stallings', Harer's and one more, last twist on fiber surfaces producing new fibered links
3. 学会等名 18th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mikami Hirasawa
2. 発表標題 On Alexander polynomials of degree over 764 of alternating knots with over 778 crossings
3. 学会等名 Mini-Workshop "Knots + More" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mikami Hirasawa
2. 発表標題 Sphere eversion in virtual reality
3. 学会等名 The 17th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 M.Hirasawa
2. 発表標題 有理数結び目について
3. 学会等名 第 41 回愛知数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M.Hirasawa
2. 発表標題 Fibration of knot complements and partial chirality of knots
3. 学会等名 キラリティー、トポロジー、結び目論 第3回研究会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M.Hirasawa
2. 発表標題 On the Distribution of Zeros of Alexander Polynomials of links
3. 学会等名 SMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M.Hirasawa
2. 発表標題 Alternating knots with Alexander polynomials having unexpected zeros
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M.Hirasawa
2. 発表標題 Some symmetry-preserving crossing changes from homologically fibered knots to fibered knots
3. 学会等名 琉球結び目セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M.Hirasawa
2. 発表標題 Alternating knots with Alexander polynomials having unexpected zeros
3. 学会等名 The 14th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

名古屋工業大学 研究者データベースシステム <a href="http://researcher.nitech.ac.jp/html/100000100_ja.html">http://researcher.nitech.ac.jp/html/100000100_ja.html</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	トロント大学			
スイス	ジュネーブ大学			
米国	ミシガン州立大学			
米国	クラーク大学			
スペイン	Instituto de Ciencias Matematicas			