

令和 5 年 6 月 23 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03297

研究課題名(和文)幾何学的力学系理論の進展と量子系のトポロジー

研究課題名(英文)Progress in geometric mechanics and topology of quantum systems

研究代表者

岩井 敏洋 (Iwai, Toshihiro)

京都大学・情報学研究科・名誉教授

研究者番号：10021635

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：量子系のパラメータ変化に伴うエネルギー固有値の変化を継続して研究した。大部分の(バルク)の固有値は、パラメータが変化しても同じバンドに属するが、一部の(エッジ)固有値は属するバンドを変える。その特徴はスペクトル流の概念で捉えられる。量子系に対応する半量子系のハミルトニアンは、いわゆる古典極限の操作で、量子系の大部分の固有値に対応するとみなされる。半量子系のハミルトニアンが2次元の球面やトーラス上で定義されているとき、その固有値の固有空間のなす複素直線バンドルのチャーン数がパラメータ変化に伴って変化する。その変化量がスペクトル流に一致すること(バルク・エッジ対応)を多くの例で示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で取り上げたバルク・エッジ対応は、近年トポロジカル絶縁体などの多くの物理現象で興味を持たれているテーマであるが、単に現象論ではなく、数学的にも量子化の問題に深く関連していて、微分幾何学(チャーン数)と解析学(スペクトル流)にまたがる話題である。実際にこのような対応は量子力学の範囲にとどまらず、もっと一般的な枠組みで、例えば古典物理学のマクスウェル方程式においても、研究され始めている。それは物理的な言い方では、力学変数を速い変数と遅い変数に分けること、あるいはスペクトル密度の高い変数(解析)と低い変数(微分幾何)に分けて扱うという考え方になる。このような背景のもとで本研究は意義深い。

研究成果の概要(英文)：I have been studying the change in energy eigenvalues of quantum systems under the variation of a control parameter. The bulk of eigenvalues belongs to the same band, but the so-called edge eigenvalues change bands to which they belong, accompanying the variation in the parameter, which is characterized as a spectral flow. In the classical limit, the quantum Hamiltonian gives rise to a semi-quantum Hamiltonian defined on a manifold, and the bulk of the eigenvalues of the quantum Hamiltonian are viewed as corresponding to the eigenvalues of the semi-quantum Hamiltonian. If the base manifold is a two-sphere or a two-torus, the first Chern number of the eigen-line bundle associated with an eigenvalue of the semi-quantum Hamiltonian changes against the parameter. The change in the Chern number is exactly the same as the spectral flow for the initial quantum Hamiltonian. This fact is understood as a bulk-edge correspondence. The present study gives several examples of great interest.

研究分野：幾何学的力学系理論

キーワード：エネルギーバンド チャーン数 スペクトル流 バルク・エッジ対応

1. 研究開始当初の背景

筆者は長年にわたって量子系のハミルトニアンのパラメータ変化に伴うエネルギーバンド構造の変化とそれに対応する半量子系のハミルトニアン(ある種の多様体上で定義されるエルミート行列)のパラメータ変化に伴うチャーン数の変化に興味を持って研究してきた。そのもととなる考え方は、量子力学で伝統的に用いられている考え方で、エネルギーレベル(固有値)の密度が高い状態を表す力学変数は古典的に取扱い、密度の低い離散的な状態を表す力学変数は量子力学的に取り扱うというものである。そのように考えて得られる力学系を半量子系と呼ぶ。量子的な変数と古典的な変数が一つのハミルトニアンの中に現れているという意味である。半量子系ハミルトニアンにおいて、軌道角運動量とスピン角運動量の相互作用を表す量子系のハミルトニアンにおいて、軌道角運動量が十分大きいときにそれを古典的な変数として扱うというものである。これは物理的な考え方であるが、具体的なモデルではその有効性が確認されている。このような設定の下で、量子系のバンド構造の変化を特徴づけるスペクトル流と、半量子系のチャーン数の変化とがうまく対応することをこれまでの研究で明らかにしてきた。

2. 研究の目的

実は上記のような対応はもっと一般的な設定で成り立つものであるという認識の下で、トポロジカル絶縁体などの物理モデルで研究されているバルク・エッジ対応(bulk-edge correspondence)との共通点を念頭に、研究対象のモデルとなる量子系の幅を広げること、そしてこれまでの研究ではトポロジカルな不変量として第1チャーン数を扱ってきたが、第2チャーン数や写像度などの不変量も含んだ形で、バルク・エッジ対応の研究を進めることである。

3. 研究の方法

半量子系のハミルトニアンのチャーン数の計算は、実際には曲率形式を求めてチャーン数の定義式を計算することなく、局所的に定義された固有ベクトルが定義されなくなる点、あるいは固有値が縮退する点で、ハミルトニアンを線形化して、それに付随して定義される写像度あるいはベクトル場の指数等を利用することにより実行できる。つまり、特異点の周りのトポロジカルな状況を捉えることで、半量子系全体のトポロジカルな変化を捉えることができる。このような考え方で、線形の半量子系ハミルトニアンとそれに対応する量子系ハミルトニアンに対するバルク・エッジ対応を研究することは幅広い対象の研究のためにも有効な手段である。この過程でいわゆるディラック振動子のハミルトニアンが有効になる。ディラック振動子は元来ディラック作用素の可解モデルとして研究され始めたものであるが、少し見方を変えて指数定理の証明でも活用されているものである。

4. 研究成果

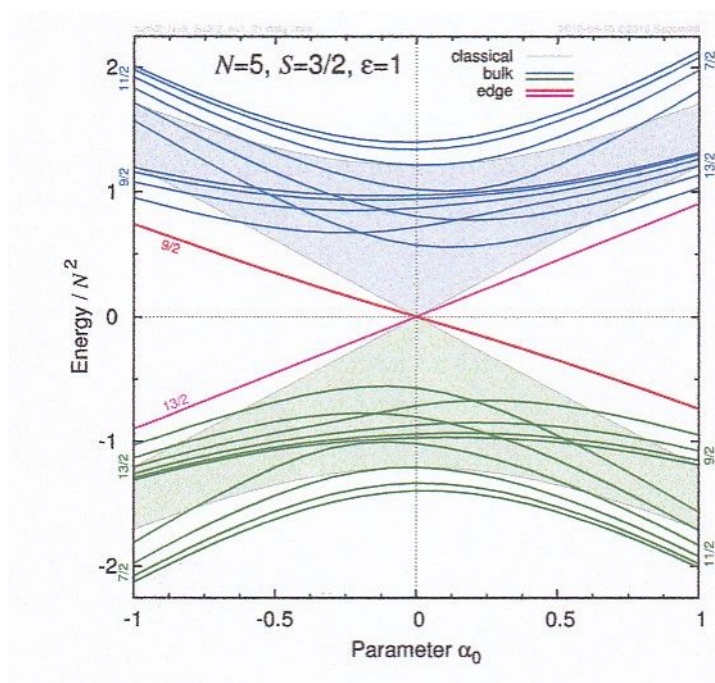
上述のようにディラック振動子の研究は基礎的に重要である。本研究では、2次元の Kramers-Dirac oscillator を定義して、その固有値と固有関数を研究した。ここで Kramers というのは、時間反転対称性の持つ量子力学的意味について研究した Kramers に因んでつけた名称で、Kramers-Dirac oscillator とは時間反転対称性を持つディラック振動子という意味である。この量子系のバルク状態のエネルギー固有値とエッジ状態のエネルギー固有値を求めた。角運動量固有値を固定すれば、スペクトル流は -1 となることが示される。このハミルトニアンに対応する半量子系ハミルトニアンを構成するのに作用素を古典変数に置き換えるという手法を用いたのでは得られるハミルトニアンが時間反転対称性を持たなくなる。この半量子系ハミルトニアンを少し修正して時間反転対称性を持つようにすると、4次元実ベクトル空間上のハミルトニアンが得られる。ここで、形式的な第二チャーン数を定義すると、そのパラメータ変化に伴うチャーン数の変化量は、上述のスペクトル流に一致する。

2次元のディラック振動子は、一様磁場中の2次元荷電粒子のハミルトニアンと見なすことができる。そのエネルギー固有値は、バルク状態でもエッジ状態でも無限に縮退する。縮退を解消するために、2次元平面を離散群で割ってトーラスにして、かつ波動関数には位相因子付きの周期境界条件を課すと磁束が量子化され(整数値をとる)、トーラス上のファイバーバンドルの切断(section)に作用するハミルトニアンが出来上がる。これを Bloch-Dirac ハミルトニアンと呼ぶ。少し処理が難しくなるが、Bloch-Dirac ハミルトニアンの固有値と固有切断を求めることができる。それらはエッジ状態とバルク状態とに分けることができ、特にスペクトル流を担うエッジ状態の固有値は縮退しなくて、スペクトル流は -1 であることが分かる。このハミルトニアンに対応する半量子系のハミルトニアンは、磁場中の共変微分作用素を古典変数に置き換えるという手法で定義することができる。このとき、共変微分作用素の交換関係は同じ形の古典変数のポアソン括弧に置き換わる。このような設定で、チャーン数のパラメータ変化に伴う変化量は上記のスペクトル流に一致し、バルク・エッジ対応の成り立つことが確認できる。共変微分作用素を古典変数に置き換えるという手法は、一見乱暴なように見えるが、ここで取り扱っている共変微分作用素は、ユニタリー変換で普通の位置変数と運動量変数に置き換えることがで

きるので、結局のところ普通の(シュレーディンガーの)量子化の手続きを逆方向に行っているに過ぎない。

ディラック振動子を用いる線形化の手法は有効であることがすでに確認できているので、この手法を、従来から研究してきたスピン・軌道角運動量相互作用を記述するハミルトニアンを少し拡張したものに適用した。すでに分かっている量子系のパラメータ変化に伴うバンド構造の変化が、ディラック振動子を用いる手法で、定性的というよりもむしろ定量的に再現されることが確認できた。これまでの研究では、半量子系のハミルトニアンを考えて、固有値の分布構造の変化に興味をもってきたが、視点を変えて、スピン変数も古典変数に置き換えるという手法で、対応する古典系のハミルトニアンを定義して、元の量子系のエネルギー・運動量固有値との関連を調べた。すると古典系のエネルギー・運動量写像と量子系のエネルギー・運動量スペクトルとが見事に対応していて、量子系のバンド構造の変化が古典系のエネルギー・モーメント写像の特異点の移動と対応していることが見いだされた。しかし、まだこの対応のトポロジカルな意味を位相不変量で捉えること、例えば量子系のスペクトル流と古典系のモノドロミーとの対応で捉えるということはまだできていない。

バルク・エッジ対応で半量子系のハミルトニアンの第2チャーン数が関与するような場合には、数学的に言い換えると階数2の複素ベクトルバンドルを取り扱う場合には、ハミルトニアンは時間反転対称性を持つことが要求される。そのようなモデルを2つの角運動量の相互作用で実現するために、角運動量の合成の理論を活用して候補となるハミルトニアンを構成した。角運動量的一方を古典変数に置き換えると、すなわち対応する半量子系のハミルトニアンは、物理的にはスピンと電気双極子との相互作用を表すハミルトニアンとして知られているものに一致する。このような設定で、バルク・エッジ対応がどのように実現されるか考えたが、十分な数学的証明はまだ残された課題である。下図は数値計算で得られたいくつかのエネルギー固有値を图示するものであり、スペクトル流がゼロであることを示唆している。



バルク・エッジ対応が主たる研究対象であったが、幾何学的力学系理論という大きな枠組みの中で、猫の宙返りに関する書籍を出版した。タイトルは Geometry, Mechanics, and Control in Action for the Falling Cat である。この本の内容の基本のアイデアは多粒子系において全角運動量がゼロという条件の幾何学的意味が接続の理論で理解できるということにある。その上で、全角運動量がゼロという条件をうまく取り込むようにラグランジュ形式あるいはハミルトン形式で力学系を構成する。猫のモデルは2つの円柱を結合したものである。粒子系から剛体系へ理論を拡張する必要があるが、慣性テンソルは剛体系でも粒子系でも同様に定義できるので拡張は容易である。構成された力学系の上にさらに制御を加える必要があるが、制御入力にはトルクとして扱うので、力学系としてはハミルトン形式であっても保存系ではなくなる。うまく制御入力を選んで宙返りが実現できることを図解している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 T. Iwai and B. Zhilinskii	4. 巻 156
2. 論文標題 Bulk-edge correspondence for the Dirac oscillator on the two-torus as a magnetic unit cell	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 103784
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2020.103784	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Iwai, D.A. Sadovskii, and B. Zhilinskii	4. 巻 12
2. 論文標題 Angular momentum coupling, Dirac oscillators, and quantum band rearrangements in the presence of momentum reversal symmetries	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Geometric Mechanics	6. 最初と最後の頁 455-505
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/jgm.2020021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 G. Dhont, T. Iwai, and B. Zhilinskii	4. 巻 25
2. 論文標題 A Study of energy band rearrangement in isolated molecules by means of the Dirac oscillator approximation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Regular and chaotic dynamics	6. 最初と最後の頁 424-452
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1134/S1560354720050032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Toshihiro Iwai and Boris Zhilinskii	4. 巻 2137
2. 論文標題 The 2D Kramers-Dirac oscillator and a corresponding semi-quantum system	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Iwai, D.A. Sadovskii, and B. Zhilinskii	4. 巻 出版予定
2. 論文標題 Angular momentum coupling, Dirac oscillators, and quantum band rearrangements in the presence of momentum reversal symmetries	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journna of Geometry and Mechanics	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/jgm.2020021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Iwai and B. Zhilinskii	4. 巻 383
2. 論文標題 The 2D Kramers-Dirac oscillator	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physics Letters A	6. 最初と最後の頁 1389-1395
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physleta.2019.01.062	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T, Iwai and B. Zhilinskii	4. 巻 -
2. 論文標題 Band rearrangement through the 3D-Dirac equation with boundary conditions, and the corresponding topological change	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 arXiv:1812.05364v1	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 岩井敏洋
2. 発表標題 A way to the instanton
3. 学会等名 立命館大学 幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩井敏洋
2. 発表標題 Geometry, mechanics, and control in action for the falling cat
3. 学会等名 名古屋大学情報学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshihiro Iwai
2. 発表標題 Bulk-edge correspondence for the Dirac oscillator on the two-torus as a magnetic unit cell
3. 学会等名 University of Antwerp (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩井敏洋
2. 発表標題 4D Dirac oscillator
3. 学会等名 幾何学と大域解析学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩井敏洋
2. 発表標題 The 2D Kramers-Dirac oscillator
3. 学会等名 Symetry and singularity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩井敏洋
2. 発表標題 The Dirac equation on S^3 , revisited
3. 学会等名 量子化の幾何学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩井敏洋
2. 発表標題 A bulk-edge correspondence through the second Chern number
3. 学会等名 立命館大学 幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩井敏洋
2. 発表標題 Bulk-edge correspondence in two and three dimensions
3. 学会等名 名古屋数理情報科学研究会（招待講演）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Toshihiro Iwai	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 182
3. 書名 Geometry, Mechanics, and Control in Action for the Falling Cat	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------