

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03298

研究課題名（和文）曲率が上または下に有界な空間の幾何学

研究課題名（英文）Geometry of spaces with curvature bounded above or below

研究代表者

横田 巧 (Yokota, Takumi)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：70583855

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では主にボレル確率測度を持つ完備可分距離空間である測度距離空間の幾何学に関する成果が得られた。特に、測度距離空間の同型類全体の集合において M. Gromov (1999) が導入したボックス距離とリップシッツ順序に関して、証明の概略のみが与えられていた、任意のプレコンパクト集合が有界であること、つまりそのプレコンパクト集合に属す全ての測度距離空間を支配する1つの測度距離空間が存在することの証明を与え、論文として出版した。その他にも、測度距離空間の幾何学の研究において有用となる幾つかの命題を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン幾何学において、リーマン多様体の一般化である距離空間や測度距離空間の幾何学が活発に研究されている。これらの空間は、例えば曲率が上または下に一様に有界な多様体の列の極限空間として現れ、背理法による議論などにおいて有効であるが、距離空間や測度距離空間の幾何学自体も興味深い研究対象である。本研究で証明された定理や命題は、今後の距離空間や測度距離空間の研究において有用であると期待される。近年、測度距離空間は機械学習などの分野でも研究されており、いわゆる抽象数学に限らない今後の応用も期待される。

研究成果の概要（英文）：In this project, some theorems on metric-measure spaces which are complete separable metric spaces with Borel probability measures were proved. In particular, one of the main results is that a set of metric-measure spaces is precompact with respect to the box distance if and only if it is bounded, that is, there exists a metric-measure space which dominates any element in the set with respect to the Lipschitz order as was sketched by M. Gromov (1999). Moreover, several propositions which will be useful in the study of the geometry of metric-measure spaces were also proved.

研究分野：距離空間および測度距離空間の幾何学

キーワード：測度距離空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

リーマン多様体の幾何学的な性質と曲率の関係を調べることは、リーマン幾何学における基本問題の一つである。近年、リーマン幾何学において、リーマン多様体の一般化である距離空間や測度距離空間 (metric measure space、mm空間) の幾何学が活発に研究されている。それらの空間は例えば、断面曲率が上または下に一樣に有界であるか、リッチ曲率が下に一樣に有界であるようなリーマン多様体の列の (測度付き) Gromov-Hausdorff 収束などに関する極限空間として現れ、背理法による議論などにおいて有効である。また、リーマン多様体を一般化することで、議論の本質が見えたり、比較的簡単な証明が得られることもある。一般に、それらの空間は特異点を持つが、曲率に関する仮定から限られた特異点しか現れないことが証明される。曲率が上または下に有界な距離空間や測度距離空間である CAT-空間、Alexandrov 空間、RCD 空間などは、それぞれ独立に研究されてきたが、それらの空間を総合的に扱うことで新たな問題を創出することが出来ると考え、着想に至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は、曲率が上または下に有界な距離空間または測度距離空間である CAT-空間、Alexandrov 空間、RCD 空間などの空間の幾何学的性質を研究し、リーマン幾何学の発展に貢献することである。

3. 研究の方法

本研究では、断面曲率やリッチ曲率が上または下に有界な距離空間または測度距離空間である CAT-空間、Alexandrov 空間、RCD 空間などの空間の幾何学的性質を研究する。

CAT-空間は、その断面曲率が上に有界であることを意味する不等式が成り立つ距離空間であり、Cartan、Alexandrov、Toponogov の 3 人の幾何学者の名前の頭文字を並べて、そのように呼ばれている。特に曲率が 0 以下の距離空間である CAT(0)-空間はよく研究されているが、CAT(0)-空間における既存の結果を拡張し、例えば確率測度の重心を用いて定義される CAT(1)-空間値マルチンゲールの理論を発展させたい。一般に、CAT(1)-空間では CAT(0)-空間と違い、距離関数が凸関数でないため困難が生じるが、研究代表者による半径の小さい CAT(1)-空間における確率測度の重心の一意存在の証明と同様に、CAT(1)-空間上の W. Kendall (1991) の凸関数が有用であると期待される。

断面曲率が下に有界で姉ことを意味する不等式が成り立つような距離空間である Alexandrov 空間に関しては、Gromov-Hausdorff 距離が近く次元が等しい 2 つの有限次元コンパクト Alexandrov 空間は双リプシッツ同相であるかという重要な未解決問題が残されている。G. Perelman の安定性定理により、それらの 2 つの Alexandrov 空間が同相であることは知られている。可能ならば、リッチ曲率が下に有界であることを意味する条件である RCD (リーマン的曲率次元、Riemannian Curvature Dimension) 条件を満たす測度距離空間である RCD 空間の手法を用いて、この問題を考えたい。

様々な意味で曲率が上または下に有界な空間が関わる問題として、RCD 空間から CAT(1)-空間への調和写像について、様々な手法を用いて考えたい。

また、リーマン計量をより良い計量に変形する手法であるリッチ流 (Ricci flow) に関して、閉多様体上のリッチ流が有限時間で特異点を生成したとき、そのスカラー曲率が無限大に発散するかという未解決問題がある。有限時間特異点において断面曲率とリッチ曲率が発散することは R. Hamilton (1982) と N. Šešum (2005) により証明されており、同じことがスカラー曲率に対しても成り立つと期待される。もしスカラー曲率が有界なまま特異点が生成した場合、その周りの拡大リスケール極限はリッチ平坦な多様体であることが分かる。リッチ流の特異点の拡大リスケール極限として自明なリッチ流であるリッチ平坦な多様体が現れることは直感に反するか、今のところ矛盾を導く方法は知られていない。この問題について RCD 空間などの幾何学的手法を用いて考える。実際、N. Šešum (2005) による証明は比較的簡単な幾何学的議論によるものであったため、リッチ流の研究に測度距離空間の幾何学の理論は有効であると期待出来る。

助成金はリーマン幾何学関係の書籍購入のため、及び国内外での研究成果の発表、研究打ち合わせのための出張旅費として使用する。

4. 研究成果

2018 年度は、前年度に小澤龍ノ介氏 (当時、大阪大学) との共同研究で得られていた、測度距離空間の列が集中したときのリーマン的曲率次元 (RCD) 条件の安定性に関する定理の証明を書

いた論文を完成させた。この定理は、曲率次元 (CD) 条件を満たす測度距離空間における Cheeger エネルギーの幾何学的表示を用いて、CD 条件を満たす測度距離空間の列が集中したときの Cheeger エネルギーの収束を示すことで証明した。これらは、より強い収束の場合の Gigli-Mondino-Savaré (2015)らによる結果の拡張でもある。

RCD(リーマン的曲率次元、Riemannian Curvature Dimension)条件は、Ambrosio-Gigli-Savaré (2014) らが導入した測度距離空間に対して定義される曲率条件であり、Lott-Villani (2009) と K.-T. Sturm (2006) が導入した最適輸送理論に由来する CD 条件を強めたものである。測度距離空間の集中とは、M. Gromov (1999) が導入した測度距離空間の列の収束の概念の一つであり、測度付き Gromov-Hausdorff 収束などよりも弱い収束である。

また、RCD 条件を満たす測度距離空間の列が集中したときの Cheeger エネルギーの Mosco 収束も証明した。Mosco 収束は 収束よりも強い収束である。証明には RCD 空間の熱流の性質を用いた。この Mosco 収束を用いて、RCD 空間のラプラシアンの特値が離散的になるような適当な仮定のもとで、RCD 空間の列が集中したときのラプラシアンの固有値の連続性も証明した。

2019 年度は、前年度から行なっていた小澤龍ノ介氏(当時、東北大学 AIMR)との共同研究で、特に Gromov (1999) が測度距離空間に対して導入したオブザーバブル距離とリプシッツ順序、ピラミッドと呼ばれる測度距離空間の同型類からなる集合の幾何学について研究した。オブザーバブル距離の定義は測度集中現象と呼ばれる現象に由来し、2つの空間上のリプシッツ関数を比較して定義される。オブザーバブル距離に関する測度距離空間の列の収束を集中と呼ぶ。測度距離空間の列の集中と、それらの空間に付随するピラミッドの列の収束が同値であることが知られている。

距離関数に適切な関数を合成して距離空間を変形することを metric transformation と呼ぶ。そこで、集中する測度距離空間の列に対し、単調非減少な連続関数による metric transformation が集中することを証明し、また、ピラミッドに対しても metric transformation を定義し、ピラミッドの収束列の metric transformation が収束することを証明した。これにより、測度距離空間の列の集中とピラミッドの収束列の新しい例が得られた。

また、Ambrosio-Gigli-Savaré (2014) が導入した Polish extended measure space と呼ばれる、完備距離化可能で可分な位相空間上の距離とボレル確率測度からなる 4 つ組に対して測度距離空間の理論を拡張し、ピラミッドとの関係を調べた。特に、任意のピラミッドはある Polish extended measure space に付随するピラミッドであることを証明した。そのような空間は、そのピラミッドを近似する測度距離空間のリプシッツ順序に関する増大列の射影極限として構成した。

2020 年度は引き続き、測度距離空間の幾何学に関する研究を行った。特に数川大輔氏(当時、大阪大学)との共同研究で、測度距離空間の同型類全体の集合において Gromov が導入したボックス距離とリプシッツ順序に関して、任意のプレコンパクト集合が有界であること、つまりそのプレコンパクト集合に属する全ての測度距離空間を支配する測度距離空間が存在することを証明した。この主張には Gromov による証明のスケッチは与えられていたが詳細な証明は与えられていなかった。今回、与えられていた証明のスケッチの一部を変更することで、詳細な証明を与えた。また、コンパクト距離空間の等長類全体の集合においても、コンパクト距離空間の間に定義される Gromov-Hausdorff 距離と新しく定義したリプシッツ順序に関して、同様の命題が成り立つことも証明した。

2021 年度は、前年度の数川大輔氏(当時、大阪大学)との共同研究で得られた、測度距離空間の同型類全体の集合の相対コンパクト性と有界性に関する定理と、コンパクト距離空間に関する類似の命題の証明を完成させ、論文として投稿し出版された。更に、この定理と命題を相対コンパクト集合がピラミッドと呼ばれる集合の部分集合である場合に拡張する定理の証明を目指した。

2022 年度も引き続き数川大輔氏(九州大学)との共同研究で、特に測度距離空間からなるプレコンパクト集合に関する研究を行い、一つの距離空間への等長埋め込みによる測度距離空間からなる集合のボックス距離が誘導する位相でのプレコンパクト性の特徴付けを証明し、その系として測度距離空間の列のボックス距離に関する収束と Gigli-Mondino-Savaré (2015) により導入された pmG (pointed measured Gromov)-収束が同値であることの証明を与えた。その他にも測度距離空間の間のリプシッツ順序などに関する幾つかの有用な命題を証明した。

また、測度距離空間の列の積の収束に関する既存の結果を拡張するため、2つのピラミッドの積を定義し、収束するピラミッドの列の積の収束に関する研究を行なった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazukawa Daisuke, Yokota Takumi	4. 巻 215
2. 論文標題 Boundedness of precompact sets of metric measure spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 229 ~ 242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-021-00646-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryunosuke Ozawa, Takumi Yokota	4. 巻 58
2. 論文標題 Stability of RCD condition under concentration topology	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-019-1586-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 横田巧
2. 発表標題 ピラミッドの積の収束について
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 横田巧
2. 発表標題 Boundedness of precompact sets of metric measure spaces
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 横田巧
2. 発表標題 測度距離空間の射影極限とピラミッド
3. 学会等名 確率論と幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 横田巧
2. 発表標題 Some observation on the geometry of metric measure spaces
3. 学会等名 測地線および関連する諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 横田 巧
2. 発表標題 測度距離空間の幾何学とその拡張
3. 学会等名 幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 横田 巧
2. 発表標題 測度距離空間の幾何学とその拡張
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takumi Yokota
2. 発表標題 Stability of RCD condition under concentration topology
3. 学会等名 The 4th China-Japan Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takumi Yokota
2. 発表標題 Barycenter of probability measures on CAT(1)-spaces of small radii
3. 学会等名 Workshop on barycenters, convexity on metric spaces and positive operators (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 横田巧
2. 発表標題 RCD空間の集中とスペクトル収束
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------