

令和 5 年 4 月 20 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03304

研究課題名（和文）同変トポロジーによる有限群の幾何学的表現の構成

研究課題名（英文）Constructing geometric representations of finite groups through equivariant topology

研究代表者

鍛冶 静雄 (Kaji, Shizuo)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：00509656

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：ルート系に付随する実トーリック多様体について、そのコホモロジーへのワイル群の作用を考察したのが最も興味深い成果である。その応用として、オイラーのジグザク数の一般化という組合せ論的におもしろい対象がトポロジーを通して出現した。また、旗多様体や実トーリック多様体、ワイル群などを扱った研究全般を通じて、具体例を計算するためのアルゴリズムを多数開発した。数学外にも応用される計算機プログラムを研究期間中に複数公開した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

旗多様体や実トーリック多様体といった空間のトポロジーと組合せ論を協調させて解析する実例を複数提供したことが、同変トポロジー分野における学術的意義といえる。また、計算アルゴリズムを開発しその実装を公開したことで、今後具体例から新たな知見が得られることが期待される。応用として、機械学習や画像解析の手法を開発し、こちらもその実装を公開している。実際に医療・材料・データ解析などに利用されており、社会還元がなされている。

研究成果の概要（英文）：The most interesting result obtained during the research period is the determination of the action of the Weil group on the cohomology of the real toric manifolds associated with root systems. As a byproduct, a topological realisation of a combinatorial object known as the generalised Euler's zigzag numbers were obtained. Throughout the research period, a number of algorithms for computing concrete examples regarding flag manifolds, real toric manifolds, and Weyl groups were developed. Also, computer programmes were produced and made publicly available as open-source software, and they have been used in various fields outside of mathematics.

研究分野：位相幾何学

キーワード：同変トポロジー 計算トポロジー ワイル群 旗多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

旗多様体やトーリック多様体など、良い群作用を持つ空間のトポロジーは、しばしば離散的対象を用いて記述できる。例えば、シューベルトカリキュラスでは旗多様体をワイル群や対称多項式を通して、トーリック幾何・トポロジーではトーリック多様体を多面体や単体複体を通して調べることで、多くの構造が明らかにされてきた。また逆に、組合せ論の問題がこれらの対応を通じて空間の問題に翻訳されることで、トポロジーを用いて解決される例も多い。このような空間と組合せ論の対応を考察するのが同変トポロジーの一つの側面であるが、その中で本研究では、旗多様体と実トーリック多様体を主な対象に、ホモトピーの手法を用いて組合せ論の道具を空間へ持ち上げる手法の開発を目指した。

2. 研究の目的

ルート系・ワイル群は数学の至る所に現れる対象であるが、同変トポロジーの文脈では、旗多様体とトーリック多様体を通して出現する。その組合せ論的な構造が、これらの空間のホモトピー論にどう現れるかを探ることが本研究の目的であった。特に、コンパクト・リー群に付随する旗多様体と、ルート系に付随する実トーリック多様体について考察した。良く調べられている複素トーリック多様体に対して、実トーリック多様体は異なる様相を示す場面も多く、その差異が具体的に現れる性質を探るのも一つの目的とした。

3. 研究の方法

- 1) ワイル群の組合せ構造を幾何的に実現するものとして、コクセター複体に付随する実トーリック多様体を考察した。この方向の研究では、複素トーリック多様体に関するものが主流であるが、実トーリック多様体では少なく、複素と実の差異を見る上でも興味深い。
- 2) コンパクト・リー群の等質空間として旗多様体へワイル群が作用するが、旗多様体のコホモロジーへのワイル群の群環の作用を、その他のホモトピー論的に定義される作用素と関連させつつ調べた。
- 3) 旗多様体と、重要なトーリック多様体であるポットの塔を同時に一般化するものとして、旗多様体の束の塔で表される空間を考察した。
- 4) 多様体が与えられたとき、その部分多様体がいづベクトル束のゼロ切断として実現できるかは基本的な問題である。旗多様体の場合に、コホモロジーやK理論がシューベルト多項式で記述できることを用いて、この問題にアプローチした。

4. 研究成果

1) に関するもの

コクセター複体の上には元のワイル群が作用するが、これに対応する実トーリック多様体のコホモロジー上に誘導されるワイル群の表現を具体的に計算した。その応用として、E型を除くワイル群のコクセター複体に対応する実トーリック多様体のベッチ数を決定することができた。この研究は、The Korean Federation of Science and Technology Societies (KOFST) によって2020年度 The 30th Annual Excellent Paper Award に選出された。さらに、B型、C型に対応する実トーリック多様体のベッチ数については、古典的な組合せ論の対象であるオイラーのジグザグ数、またその一般化との関連を見いだした。

2) に関するもの

ワイル群の群環における冪等元と非安定アダマス作用素をホモトピー型のレベルに持ち上げることで、旗多様体の懸垂が簡単な空間の一点和へ分解することを示した。その応用として、旗多様体から自分自身への写像全体のなすホモトピー集合を計算する方法を与えた。

本研究の一つの特徴として、具体的なアルゴリズムの開発も実施した。1), 2) の結果は計算機プログラムとしても公開している。

3) に関するもの

射影空間の束の塔で表されるボットの塔は重要なトーリック多様体であるが、その一般化として旗多様体の束の塔で表される空間を考察し、その上へのトーラスの作用を定め、同変コホモロジーを決定した。また、ボットの塔では束の塔としての構成と、リー群の部分群による商空間としての構成の二つの見方ができることが重要であるが、この一般化についても二つの構成が可能であり、それらが同値であることを示した。

4) に関するもの

一つの旗多様体における一点、あるいは同じ旗多様体の二つの直積における対角集合という部分多様体が、いつベクトル束のゼロ切断として表されるかについて考察を行った。これはそれぞれ旗多様体のコホモロジーとトーラス同変コホモロジーの問題として定式化され、ルート系に付随する(二重)シューベルト多項式との関連から調べられた。

5) その他・計算トポロジーに関するもの

(コ)ホモロジーの計算アルゴリズムを考察する中で、研究開始当初に予期していなかった方向として、パーシステントホモロジーの高速計算アルゴリズムの開発を行なった。パーシステントホモロジーは、位相データ解析と呼ばれる新しいデータ解析手法の主要な道具である。CTやMRIといった3次元画像に対してパーシステントホモロジーを高速に計算するソフトウェアを公開した。また、それを医用画像解析に適用する研究も行なった。特に肺CTから疾患部位を同定する手法を提案することができた。

また、広くトポロジーの応用研究を行った。

- ・空間対を用いて有向グラフに幾何的表現を与える手法を開発した。これはグラフ型のデータを扱う機械学習においても有用であるため、機械学習分野で発表した。

- ・超平面配置を用いて、対称群の上の確率分布の新しいモデルを提案した。これは嗜好などの順位データの解析に応用でき、機械学習分野で発表した。

- ・カライドサイクルと呼ばれるリンク機構を、その配位空間を調べることで解析した。二次方程式系の実解の集合として定まる配位空間の上に、半離散可積分方程式で記述されるフローを与え、それがリンク機構の運動を記述することを示した。

これらの成果は論文だけでなく、その実装をオープンソースソフトウェアとしても公開しており(<https://github.com/shizuo-kaji/>)、医療・材料・機械学習などの分野で利用されている。

以上の応用トポロジーに関する研究などが、2020年度 第9回 藤原洋数理科学賞 奨励賞 に選出された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Kodai Takenaga and Shizuo Kaji	4. 巻 -
2. 論文標題 Alexandrov Puzzle	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of Bridges 2022: Mathematics, Art, Music, Architecture, Culture	6. 最初と最後の頁 371-374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Bando Hiroaki, Kaji Shizuo, Yaguchi Takaharu	4. 巻 14
2. 論文標題 Causal inference for empirical dynamical systems based on persistent homology	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 69 ~ 72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.14.69	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kaji Shizuo, Horiguchi Akira, Abe Takuro, Watanabe Yohsuke	4. 巻 -
2. 論文標題 A Hyper-surface Arrangement Model of Ranking Distributions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery & Data Mining	6. 最初と最後の頁 796-804
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3447548.3467253	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nozomi Hata, Shizuo Kaji, Akihiro Yoshida, and Katsuki Fujisawa	4. 巻 119
2. 論文標題 Nested Subspace Arrangement for Representation of Relational Data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the thirty-seventh International Conference on Machine Learning (ICML2020)	6. 最初と最後の頁 4127-4137
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kaji Shizuo, Kuroki Shintaro, Lee Eunjeong, Suh Dong Youp	4. 巻 22
2. 論文標題 Flag Bott manifolds of general Lie type and their equivariant cohomology rings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 375 ~ 390
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2020.v22.n1.a21	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kaji Shizuo	4. 巻 19
2. 論文標題 Representing a point and the diagonal as zero loci in flag manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 2061 ~ 2075
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2019.19.2061	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Choi Suyoung, Kaji Shizuo, Park Hanchul	4. 巻 62
2. 論文標題 The Cohomology Groups of Real Toric Varieties Associated with Weyl Chambers of Types C and D	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 861 ~ 874
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S001309151800086X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Soojin Cho, Suyoung Choi, and Shizuo Kaji	4. 巻 56-5
2. 論文標題 Geometric representations of finite groups on real toric spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Korean Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1265-1283
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4134/JKMS.j180646	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kaji Shizuo, Theriault Stephen	4. 巻 35
2. 論文標題 Suspension Splittings and Self-maps of Flag Manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Sinica, English Series	6. 最初と最後の頁 445 ~ 462
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10114-019-8051-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Shizuo Kaji
2. 発表標題 Introduction to Persistent Homology for Graph Analysis
3. 学会等名 The 5th International Conference on Econometrics and Statistics (EcoSta 2022) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shizuo Kaji
2. 発表標題 Modelling preference with hyperplane arrangement
3. 学会等名 Statistics and Mathematical Modelling in Combination (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shizuo Kaji
2. 発表標題 The topology and geometry of a closed kinematic linkage
3. 学会等名 The 11th International Career Days at Eastern Mediterranean University (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 S. Kaji
2. 発表標題 Tutorial on CubicalRipser and other TDA software using Python
3. 学会等名 POSTECH MINDS & PIAI Workshop on Topological Data Analysis and Machine Learning (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shizuo KAJI
2. 発表標題 Geometry of the configuration space of Kaleidocycles
3. 学会等名 African Mathematics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鍛冶静雄
2. 発表標題 同変ループ積について
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Shizuo Kaji's web page
<https://www.skaji.org/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------