1版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　５ 月 ２０ 日現在

機関番号：３２６４４

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2020

課題番号：１８Ｋ０３３０９

研究課題名（和文）チャート変形理論

研究課題名（英文）Theory of transformations of charts

研究代表者

志摩　亜希子（Shima, Akiko）

東海大学・理学部・教授

研究者番号：５０３１７７６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：4次元空間内の曲面(曲面結び目)を平面内のグラフ(チャートという)で表す手法が鎌田氏により開発された。チャートを用いて分類表を作成するのが目的である。辺のラベルが、1,2,3の2つの交差を含む4-チャートの大まかな分類は終わっているが、完全な分類のために補空間の基本群、quandle による彩色数を計算した。それより10種類以上の異なる曲面結び目を含むことが分かった。 実際に無限個の種類の曲面結び目を含むかは、これからの研究の課題として残された。白頂点を8個含むチャートについても調べた。(2,2,2,2)型最小6-チャートは、ある種の形(レンズ)を含まないと示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
幾何学の分野で、図形を分類するのは大きな目標である。その中の4次元空間内の曲面(曲面結び目)の分類に貢献した研究である。曲面結び目は実際に描くことが難しいようであるが、鎌田氏により、平面のグラフ(チャートという)で描くことが可能になった。そのため、大まかな分類が可能になり、詳細な分類のためにコンピューターを使って、彩色数を計算することが出来た。完全な分類にはまだまだ道半ばであるが、2個の交差をもつ4-チャートの中に10種類以上の何か未知の曲面結び目が見つかり、私としては興味深い研究であった。

研究成果の概要（英文）：Kamada developed a display of a surface-knot in the 4-dimensinal space by drawing a graph in the plane called a chart. We want to make a table of surface-knots by using charts. We almost classify 4-charts with 2 crossings (having edges of labels 1, 2 or 3). To classify completely, we calculate the fundamental groups of the complements of surface-knots, and we calculate colorings for quandles. Then there are at least 10 surface-knots for the 4-charts. However we do not understand there are infinity many surface-knots for the 4-charts.
We research charts with 8 white vertices. We show that there do not exist any lens in minimal 6-charts of type (2,2,2,2).

研究分野：トポロジー

キーワード：曲面結び目　チャート

１．研究開始当初の背景

４次元空間内の曲面(曲面結び目)の研究は、モーション・ピクチャーやダイアグラムという手法を用いて研究する方法がある。最初の手法は、４次元空間内の図形を時間とともに３次元空間内の図形が変化するものと考える手法である。２番目の手法は、４次元空間の図形を p(x,y,z,w)=(x,y,z) という写像 p で３次元空間に射影し、その像で４次元空間の図形を捉える手法である。どちらも直観的で分かりやすい手法であるが、立体図形を扱う必要があり、欠点もある。

鎌田氏[1],[2]によって、平面内のグラフ(辺にラベルと向きが付けられたグラフ)により、曲面結び目を表示する画期的な方法が開発された(チャートという)。４次元空間内の曲面の変形を、チャート変形と呼ばれる平面内の変形で、ある程度表すことも可能になっている。このチャートを用いて、曲面結び目の分類表を作成することがこの研究の動機である。３次元空間内の閉じた紐(結び目)については、交差点数に関する分類表があり、結び目理論の発展に大いに役立っている。曲面結び目の分類表を作成することにより、こちらの分野も発展すると期待される。

３次元空間内の結び目(埋め込まれた円周) にも深く関係するブレイド群

$$Bn=\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (i=1,2,\dots,n-1), \quad \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i \quad (|i-j|>1) \rangle$$

というものがあるが、最初の関係式は white vertex と呼ばれる頂点に対応し、２番目の関係式は crossing と呼ばれる頂点に対応することが知られている。ブレイド群 Bn の２つの元が同じであるとき、自然に円板上のチャート(境界に交わりがある) が構成される。従って、チャート変形を研究することは単に曲面結び目を研究するだけでなく、ブレイド群を研究することにも結びついている。

このチャート表示は、曲面結び目に限らず、チャート理論[3],[4]として拡張され、モノドロミー表現の図式に関する理論が作られている。この表示を使うことにより、４次元多様体である Lefschetz ファイバー空間を曲面上のラベル付き有向グラフとして捉えることが出来る。頂点やチャート変形は上のチャートより複雑になる。チャート変形を研究することは、４次元多様体を研究することにも繋がっている。

２．研究の目的

鎌田氏[1],[2]によって、曲面結び目を表示する画期的な方法、平面上のチャートというグラフが定義された。本研究の目的は曲面結び目を変えないチャートの同値変形、チャート変形を研究し、曲面結び目について調べることである。曲面結び目理論の発展や曲面結び目の分類のために、チャート変形を組合せ的に調べ、複雑な変形の中にある一定の法則を導き、チャートの分類表を作成することを目的とする。

これまで crossing の個数の小さいものから調べる方法と、white vertex の個数の小さいものから調べる方法を行ってきた。どちらも個数が少ない場合は、white vertex のないチャートに変形出来るリボンチャートというものであることが分かっている。リボンチャートでないものは、white vertex の個数が、4 個や 6 個や 8 個以上であり、crossing の個数は 2 個以上である。この丁度境目の所にどんな未知チャートがあるか調べることを目的としている。分類表の複雑な部分の第一歩となる場所を調べようとしている。

結び目を分類するために古典的な不変量として、基本群がある。しかし扱いが難しいので、Alexander 多項式など、新しい不変量が結び目理論では多く開発されている。曲面結び目にも基本群は使える。更に quandle cocycle 不変量と呼ばれるものも近年開発されている。これらは、曲面結び目を分類するためにとても有効な道具である。しかし、結び目理論ほど豊富で計算しやすい不変量がないので、曲面結び目の不変量の研究をする上で大切なことである、多くの曲面結び目を構成することを目的としている。

３．研究の方法

このチャートには３種類の頂点があり、black vertex と呼ばれる次数１の頂点、crossing と呼ばれる次数４の頂点、white vertex と呼ばれる次数６の頂点がある。曲面結び目を３次元空間へ射影すると、交わりのある曲面が現れるが、その曲面の交わりを更に平面に射影したグラフがチャートに対応している。チャートの辺は２枚の曲面の交わり(double curve) に対応し、３種類の頂点 black vertex、crossing、white vertex はそれぞれ branch point、２本の double curve の交わり、３重点に対応している。曲面結び目の変形をチャートの言葉で表した、チャート変形がある。４次元空間を経由せずに、チャート変形を調べることによって、曲面結び目を調べることが可能になっている。

crossing の個数と white vertex の個数を決めると，チャートは有限個しかない。しかし、一般に crossing の個数だけ決めても、white vertex の個数に制限がないと、チャートは無限個ある可能性がある。同じように、white vertex の個数だけ決めても、crossing の個数に制限がないと、チャートは無限個ある可能性がある。私達の手法[5]は、crossing の個数が 0, 1, 2

個ならば、チャートの概形がどうなっているか決定している。crossing の無い特別な領域の形を調べることで、概形を決定した。crossing の個数が 3 個ならば、一部分のチャートの概形がどうなっているか決定している。

white vertex の個数を決めると、チャートの概形がどうなっているか調べる方法も確立している。問題点は、white vertex の個数が増えると、チャートの種類が幾何級数的に増えることである。

チャートの概形が決まると、曲面結び目が定まるので、様々知られている不変量を計算することが可能である。チャートを区別するためにも、不変量を効率よく計算する方法が重要である。

４．研究成果

(1) 以前の研究により、crossing の個数が２個の n-チャート(辺のラベルが 1,2,3,…,n-1)について、グラフの概形を決定した。これらの分類の１歩として、crossing の個数が２個の 4-チャート(辺のラベルが 1,2,3)について調べた。下の図に描かれているのが、black vertex が８個の 4-チャートの例である。crossing の個数が２個の 4-チャートの内、black vertex が８個のチャートが表わす曲面結び目 F の補空間の基本群を計算した。つまり、曲面結び目 F の補空間の基本群 $\pi_1(R^4-F)$ を計算すると次のようになった。

p=2m-2 (偶数)の時、

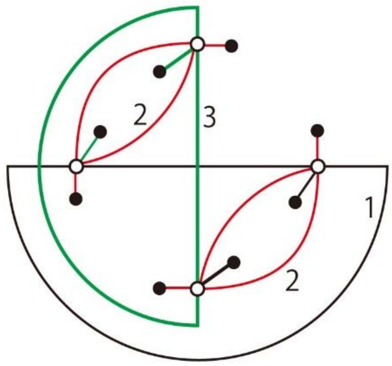
$\langle x,y \mid (xy)^m y=y(xy)^m,\ xyx=yxy^{-1}xy,\ yxy=xyx^{-1}yx \rangle$、

p=2m-1 が(奇数)の時、

$\langle x,y \mid (xy)^m x=y(xy)^m,\ xyx=yxy^{-1}xy, yxy=xyx^{-1}yx \rangle$

である。ここで、p はある部分の辺の数である。

これより、Alexander 不変量というものが計算可能で、計算結果は自明な曲面結び目と同じになってしまった。自明な曲面結び目とは、4 次元空間内の曲面結び目を変形し、第 4 座標が 0 である 3 次元空間に移動可能なものをいう。



4- チャートの例

別の手段であるが、この群の一部分が、整数全体の群 Z と同型でないことを示すことが出来た。自明な曲面結び目の補空間の基本群は Z であるので、一部分は自明な曲面結び目でない事が示された。

(2) 独自に開発したプログラムで、チャートの分類のために彩色数の計算を行った。プログラムの言語は Python を用いている。このプログラムは、チャートをコンピューターに入力し(頂点と辺のつながりなどを数字で入力)、quandle というものを使って、彩色数を計算するものである。今はまだ実験段階で、crossing が２個の 4-チャートを調べている。この 4-チャートの候補は無限個あるが、これらが１０種類以上の異なる曲面結び目を含んでいると確かめた。

研究成果(1)で計算して得られなかった結果が新しく得られた。しかし、これはまだコンピューターの計算での結果であるので、厳密に数学的に証明をつけなければならない。プログラムについても、まだまだ改良の所がある。例えば、quandle は元の個数が 6 個以下の quandle を使ったが、元の 7 個以上の quandle は種類が多すぎて、単純なプログラムの計算では、時間が掛かって結果が出力されない。この結果は、最終年度になって得られたものであった。もっと速度の速いパソコンや、計算の方法を工夫する必要があることが分かった。研究を進める場所がたくさん残されたので、次の研究に繋げたい。

(3) white vertex が 8 個のチャートを調べる為に、ある条件を満たす 2 角形(lens)を含むチャートについて調べた。lens というのは、円板で、その境界には white vertex が丁度 2 個含まれるが、crossing はあってもよいものである。もし境界に crossing を含まないとすると、チャート変形で white vertex を減らせ、もっと簡単なチャートに変形出来る性質を lens は満たす。

Γが(2,2,2,2)型チャートであるとは、あるラベル m があって、$w(\Gamma_m\cap\Gamma_{m+1})=2, w(\Gamma_{m+1}\cap\Gamma_{m+2})=2, w(\Gamma_{m+2}\cap\Gamma_{m+3})=2, w(\Gamma_{m+3}\cap\Gamma_{m+4})=2$ を満たすことである。ここで、Γ_i はラベルが i の辺の和集合とし、w(G) は G に含まれる white vertex の個数とする。

詳しい結果は以下のようである。Γを white vertex が 8 個の(2,2,2,2)型の最小 6-チャートとする。つまり、辺のラベルが 1,2,3,4,5 のみであるとする。このとき、チャートΓはある条件を満たす 2 角形(lens)を含まないことを示した。ここで、最小チャートとは、チャート変形で変形しても white vertex の数を減らせないチャートのことをいう。

分類表を作るときに注意しないといけないことは、図形は異なるチャートでも同じ曲面結び目を表すものが多々ある。同じ曲面結び目を表すチャートの内、グラフの形が最も単純なもの(例えば、white vertex の数が少ないもの)を分類表に載せることにしている。

white vertex が 8 個のチャートを調べる為にはまだまだ多くのことを調べる必要があるが、よく表れる図形を調べたことは、重要な結果であると考える。まだ証明はしていないが、white vertex が 8 個の最小チャートには 2 角形(lens)を含まないのではないかと予想が得られた。

[1] S. Kamada, *2-dimensional braids and chart description*, Proceedings of the NATO

Advanced Study Institute, 277-287 (1992).
[2] S. Kamada, Braid and Knot Theory in Dimension Four, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 95.
[3] S. Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topology Appl., 154 (2007), 1430--1446.
[4] I. Hasegawa, Chart descriptions of monodromy representations on oriented closed surface, thesis, Univ. of Tokyo, (2006).
[5] T. Nagase and A. Shima, Minimal chart, Topology Appl.(2018),291--332.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名	4．巻
Nagase Teruo、Shima Akiko	28
2．論文標題	5．発行年
Properties of minimal charts and their applications V: Charts of type (3,2,2)	2019年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Journal of Knot Theory and Its Ramifications	1950084～1950084
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1142/S0218216519500846	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Nagase Teruo、Shima Akiko	113
2．論文標題	5．発行年
The structure of a minimal n-chart with two crossings II	2018年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas	1693～1738
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s13398-018-0573-1	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Nagase Teruo、Shima Akiko	27
2．論文標題	5．発行年
The structure of a minimal n-chart with two crossings I: Complementary domains of $\Gamma_1 \cup \Gamma_{n-1}$	2018年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Journal of Knot Theory and Its Ramifications	1850078～1850078
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1142/S0218216518500785	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Nagase Teruo、Shima Akiko	241
2．論文標題	5．発行年
Minimal charts	2018年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Topology and its Applications	291～332
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1016/j.topol.2018.04.001	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名 Nagase Teruo、Shima Akiko	4．巻 284
2．論文標題 Properties of minimal charts and their applications VII: Charts of type (2,3,2)	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Topology and its Applications	6．最初と最後の頁 107365～107365
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2020.107365	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Nagase Teruo、Shima Akiko	4．巻 27
2．論文標題 Properties of Minimal Charts and their Applications VI: The Graph Γm+1 in a Chart Γ of Type (m;2,3,2)	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Sciences The University of Tokyo	6．最初と最後の頁 109--156
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 志摩亜希子
2．発表標題 There is no minimal chart of type (2,3,2)
3．学会等名 五箇山トポロジー・幾何セミナー2019
4．発表年 2019年

1．発表者名 志摩亜希子
2．発表標題 There is no minimal chart of type (2,3,2)
3．学会等名 ひねる代数～Hurwitz action とその周辺～
4．発表年 2020年

１．発表者名 志摩亜希子
２．発表標題 Minimal 4-charts with two crossings
３．学会等名 玉原トポロジー・幾何セミナー2018
４．発表年 2018年

１．発表者名 Akiko Shima
２．発表標題 The structure of a minimal n-chart with two crossings
３．学会等名 Four Dimensional Topology（国際学会）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関