

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03310

研究課題名（和文）写像類群の部分群のコホモロジー群と3次元多様体の研究

研究課題名（英文）Study on 3-manifolds and cohomology of subgroups of the mapping class group of a surface

研究代表者

佐藤 正寿（Sato, Masatoshi）

東京電機大学・未来科学部・准教授

研究者番号：10632010

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：曲面の写像類群の部分群であるTorelli群と曲面のホモロジーシリンダーについて研究を行った。特にTorelli群の部分群であるJohnson核のアーベル化のトーション元存在を示し、その一部をホモロジーシリンダーの位相不変量であるLMO関手を用いて記述した。またホモロジーシリンダーにおいて、LMO関手の1ループ部分の主要項がReidemeister-Turaevトーションという不変量を用いて表せることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲面の写像類群とは曲面の対称性のことであり、曲面の写像類群の群構造を3次元多様体の観点から研究することは基本的である。Torelli群と呼ばれる写像類群の部分群における降中心列と呼ばれる部分群列と、3次元多様体の中のホモロジーシリンダーのなすモノイドにおけるY降下列と呼ばれる部分モノイド列がある。Torelli群からホモロジーシリンダーへの自然なある単射モノイド準同型があり、これにより降中心列はY降下列に埋め込める。この準同型を通じて、両者の逐次商の構造を調べるとともに、LMO関手と呼ばれるホモロジーシリンダーの位相不変量に1つの幾何的解釈を与えた。

研究成果の概要（英文）：We study a subgroup of the mapping class group called the Torelli group and the monoid of homology cylinders of a surface. Especially, we showed that there exist torsion elements on the abelianization of a subgroup of the Torelli group called the Johnson kernel. We describe it in terms of the LMO functor, which is a topological invariant of homology cylinders. We also showed that the leading term of the 1-loop part of the LMO functor is described by the Reidemeister-Turaev torsion of homology cylinders.

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 LMO関手 ホモロジーシリンダー

### 1. 研究開始当初の背景

量子不変量とは、複素半単純 Lie 環とその表現の組から、その量子化を通して得られる絡み目の不変量である。これとは異なる文脈で、有限型不変量と呼ばれる、結び目の交差交換に関するある有限性の性質を満たす結び目の不変量が Vassiliev により構成された。その後、すべての量子不変量、および、有限型不変量は Kontsevich 不変量を用いて表されることが示された。さらに、Le-村上-大槻により、Kontsevich 不変量をもとに 3 次元多様体の不変量である LMO 不変量が構成された。また、Cheptea-葉廣-Massuyeau は、LMO 不変量のある種類の境界つき有向コンパクト 3 次元多様体に拡張した。より正確には、ラグランジアン  $q$ -コボルディズムと呼ばれるコンパクト有向曲面のコボルディズムを射とする圏から、ラベル付きのヤコビ図の空間を射とする圏への関手を構成した。これは LMO 関手と呼ばれる。これは 3 次元多様体の LMO 不変量の境界付き多様体への拡張であり、その関手性から曲面のホモロジーシリンダーからヤコビ図の空間へのモノイド準同型を与える。この関手はホモロジーシリンダーの普遍的な有理係数有限型不変量を与える強力な関手である。

一方で、曲面のホモロジーシリンダーというある種類の境界付き 3 次元多様体があり、これは境界の接着についてモノイドをなし、さらに Torelli 群からの自然な単射モノイド準同型があることが知られている。また、クラスパー手術と呼ばれる操作によりモノイドに  $Y$  降下列と呼ばれる部分モノイド列が得られ、これは Torelli 群の降中心列の 3 次元の類似とみなすことができる。また、Torelli 群からの準同型により Torelli 群の降中心列が  $Y$  降下列の中に埋め込まれることが知られている。

### 2. 研究の目的

LMO 関手についてはその主要項の計算方法については Cheptea-葉廣-Massuyeau により与えられており、またヤコビ図の 0 ループ部分が全 Johnson 写像で与えられることが Massuyeau により示されている。またホモロジーシリンダーの  $Y$  降下列の逐次商は有理数をテンソルした場合には LMO 関手によりヤコビ図を用いて明示的に記述できる。一方で、そのトーション元についてはよくわかっていない。以上を踏まえて、次の問題が考えられる。

- (a) LMO 関手の主要項の次の項を求める
- (b) 各  $n$  ループ部分に幾何的意味付けを与える
- (c) ホモロジーシリンダーの  $Y$  降下列の逐次商を決定する
- (d) Torelli 群の降中心列の逐次商と  $Y$  降下列の逐次商を比較する

### 3. 研究の方法

研究の方法についてはすでに述べたが、(a)については機械計算により主要項の次の項の予測を立て、それを用いて明示的な公式を与えた。(b)については結び目の Kontsevich 不変量では Alexander 多項式が 1 ループ部分に対応していたことに注意し、それと類似した不変量であるホモロジーシリンダーの Reidemeister-Turaev 不変量を用いて 1 ループ部分との対応を調べた。(c)については(a)で得られた LMO 関手の値と、手術写像と呼ばれるヤコビ図のなす加群から逐次商への全射を精密化することにより、逐次商を調べることを考えた。(d)については Torelli 群の降中心列の逐次商の像を  $Y$  降下列の逐次商の中で組織的に求めることはできていないが、いくつかの元を調べることで Torelli 群の降中心列の逐次商を調べた。

またこれとは別に 3 次元ハンドル体の写像類群についても研究を行った。写像類群には符号数コサイクルとよばれる整数係数 2 次コサイクルがあるが、これを適切な部分群に制限するとコバウンダリになることが知られている。これをコバウンドする関数は Meyer 関数と呼ばれ、これは代数幾何・複素幾何などの分野で研究されている符号数の局所化という現象と関わっており、位相幾何の分野でしばしば研究されている。この 1 つとして、3 次元ハンドル体の写像類群上における Meyer 関数について調べた。

#### 4 . 研究成果

3 次元ハンドル体の写像類群に関する研究成果が 1 件と、Torelli 群、ホモロジーシリンダーおよび LMO 関数に関する研究成果が 3 件である。

(1)久野雄介氏との共同研究として、3 次元ハンドル体の写像類群の符号数コサイクルについて調べた。具体的にはまず 4 次元多様体である円周上のハンドル体束の交叉形式の明示的な公式を与えた。これによりハンドル体写像類群において Meyer 関数の計算公式を与えた。また、これを利用し、超楕円のハンドル体写像類群上の整数係数 1 次コホモロジー類を構成した。種数 2 のハンドル体写像類群はその群表示からアーベル化はすでに知られていたが、本結果により、幾何的意味付けを与えることができた。また本研究は論文 “The Meyer function on the handlebody group ” として雑誌に掲載されている。

以下、(2)(3)(4)は野崎雄太氏、鈴木正明氏との共同研究である。

(2)ホモロジーシリンダーの Y 降下列について研究を行った。Y 降下列の逐次商を LMO 関数の主要項の次の項を用いて評価することにより、新しいトーション元存在を示した。特に Torelli 群からホモロジーシリンダーのなすモノイドへの自然な単射モノイド準同型により、Torelli 群の降中心列の逐次商から Y 降下列の逐次商へ加群準同型が定まるが、降中心列の逐次商、および Johnson 核と呼ばれる写像類群の部分群のアーベル化の新たな情報を与えた。つまり本結果は写像類群の部分群のアーベル化と 3 次元多様体の不変量の新しい関係を明らかにしている。本研究は論文 “Abelian quotients of the Y-filtration on the homology cylinders via the LMO functor ” として雑誌に掲載されている。また、国内での口頭発表 3 件、海外での口頭発表を 1 件行った。また、(3)(4)の結果の内容を合わせて、東京大学大学院数理科学研究科にて集中講義を行った。

(3)葉廣、Goussarov により、手術写像とよばれる、ヤコビ図の生成する加群からホモロジーシリンダーの Y 降下列の逐次商への加群準同型が構成されていた。(2)に続く研究として、この手術写像の精密化を行った。より正確には  $n$  個の 3 価頂点をもつヤコビ図に対して、手術写像はホモロジーシリンダーの  $Y_{n+1}$ -同値類に値域をもつが、これをホモロジーシリンダーの  $Y_{n+2}$ -同値類にリフトした。この精密化の応用として、通常の手術写像の核の中でいくつかの新しいトーション元を得ることができた。また、以前から手術写像の 0 ループヤコビ図への制限の核はある程度知られていたが、今回の研究により、1 ループヤコビ図への手術写像の制限の核を部分的に記述することができた。本研究は論文 “On the kernel of the surgery map restricted to the 1-loop part ” として雑誌に掲載されている。

(4)3次元多様体において acyclic な局所係数の複体を与えたとき、Reidemeister-Turaev トーションと呼ばれる、その局所係数の環の  $K_1$  群に値をもつ不変量が定まる。局所係数として、曲面の基本群の有理群環の添加イデアルのべき乗による完備化をとった環を考える。これは局所環であり、その  $K_1$  群は Dieudonné 行列式の値から計算することが可能である。ホモロジーシリンダーにおけるこの Reidemeister-Turaev トーションの値を計算し、このトーションの主要項が LMO 関手における 1 ループの主要項と榎本佐藤 trace の情報と等価であることを示した。また、クラスパーに関するこのトーションの手術公式を与えた。なお、1 ループ部分全体が Reidemeister-Turaev トーションを用いて表せるかは未解決である。本研究は論文 “A non-commutative Reidemeister-Turaev torsion of homology cylinders” として雑誌に掲載されている。また、国内での口頭発表 2 件、海外での口頭発表を 1 件行った。

以上の他に、久野雄介氏と Goldman-Turaev 双リー代数に関する研究、Quentin Faes 氏、Gwenael Massuyeau 氏と Torelli 群の降中心列の逐次商の研究を行ったが、まだ論文に発表するには至っていない。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yuta Nozaki, Masatoshi Sato and Masaaki Suzuki	4. 巻 376
2. 論文標題 A non-commutative Reidemeister-Turaev torsion of homology cylinders	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 5045-5088
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8925	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuta Nozaki, Masatoshi Sato, Masaaki Suzuki	4. 巻 15
2. 論文標題 On the kernel of the surgery map restricted to the 1-loop part	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 587--619
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/topo.12233	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Kuno and Masatoshi Sato	4. 巻 44
2. 論文標題 The Meyer function on the handlebody group	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Turkish Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1520--1533
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3906/mat-1911-67	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Nozaki Yuta, Sato Masatoshi, Suzuki Masaaki	4. 巻 26
2. 論文標題 Abelian quotients of the $Y$ -filtration on the homology cylinders via the LMO functor	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 221--282
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/gt.2022.26.221	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 佐藤正寿
2. 発表標題 A non-commutative Reidemeister-Turaev torsion of homology cylinders
3. 学会等名 微分トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 佐藤正寿
2. 発表標題 A non-commutative Reidemeister-Turaev torsion of homology cylinders
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masatoshi Sato
2. 発表標題 A non-commutative Reidemeister-Turaev torsion of homology cylinders
3. 学会等名 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐藤正寿
2. 発表標題 Abelian quotients of the Y-filtration on the homology cylinders via the LMO functor II
3. 学会等名 低次元トポロジー in 白神 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masatoshi Sato
2. 発表標題 Abelian quotients of the Y-filtration on the homology cylinders via the LMO functor II
3. 学会等名 A one-day workshop on Invariants of homology cylinders (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤正寿
2. 発表標題 LMO関手による写像類群の部分群の可換商
3. 学会等名 東京理科大学幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 佐藤正寿
2. 発表標題 LMO関手によるTorelli群の降中心列の次数商の評価
3. 学会等名 佐賀大学・学習院大学合同トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

佐藤正寿 <a href="https://www.cck.dendai.ac.jp/math/~msato/">https://www.cck.dendai.ac.jp/math/~msato/</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	久野 雄介  (Kuno Yusuke)		
研究協力者	野崎 雄太  (Nozaki Yuta)		
研究協力者	鈴木 正明  (Suzuki Masaaki)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関