様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　５月１４日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３３１２

研究課題名（和文）葉層構造と群作用の研究

研究課題名（英文）Study of Foliations and Group Actions

研究代表者
松元　重則（MATSUMOTO, Shigenori）

日本大学・理工学部・名誉教授

研究者番号：８００６０１４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：Sを向き付け可能曲面でオイラー数が負であるものとする。Sの単位接束をMとする。M上の向き付け可能な無限回微分可能な余次元１葉層構造は皆互いに位相共役であることが知られている。このような葉層構造を二つ選びそれらは互いに横断的であるとする。この状況の典型的な例は片方が測地流の安定葉層、他方が不安定葉層の場合であるが、それ以外の横断的交わりをすることもある。この場合の交わりを詳しく調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
3次元多様体上の余次元１葉層構造自体は様々な角度から調べられている。しかし二つの葉層構造の横断的交わりを詳しく調べる研究はかつてなされていなかった。我々に構成した葉層構造の交わりは、かなり不思議なものであり、一般に想像されるものとはかなり趣を異にしている。

研究成果の概要（英文）：Let S be a closed oriented surface of negative Euler number, and let M be the unit tangent bundle of S. The orientable infinitely differentiable codimension one foliations on M are mutually topologically equivalent. Choose two such foliations and assume they are mutually transverse. The typical examples of such intersections is obtained by the stable and unstable foliations of the geodesic flow. But there are other transverse intersections. We investigate such intersections.

研究分野：数学（位相幾何学）

キーワード：葉層構造

１．研究開始当初の背景

群 G を加算群とする。G 上の全順序＜で次の「」内の条件を満たすものを G 上の左不変順序という。「g,h,k を G の元とするとき、$g<h$ であるならば $kg<kh$ である。」G’で G から単位元 e を除いた集合を表すこととする。全順序<が定まると、G’の各々の元 g に対し、$g>e$ のとき 1 を対応させ、$g<e$ のとき-1 を対応させる写像 r が定まる。

　また逆に G の元に 1 か-1 を対応させる写像 r が与えられたとき、それが次の条件（１）、（２）を満たすならばこれから左不変全順序が定まる。（１）$r(g)=1, r(h)=1$ のとき $r(gh)=1$、（２）$r(f^{-1})=-r(f)$。つまり、G 上の左不変順序の全体は G に 1,-1 を対応させる写像全体のなす集合 map(G,1-1)の部分集合をなしている。

　集合 map(G,1-1)は点列収束位相をもつ。G 上の左不変順序全体のなす集合 LO(G)はこの位相に関し map(G,1-1)の閉集合であり、従って、LO(G)はコンパクト位相空間をなす。

　ある左不変順序＜がこの位相に関して孤立点であるとき、＜は孤立順序であるという。一般に左不変順序が与えられたとき、その「力学的実現」と言われる、実直線への作用 a が定まる。これは実直線の上に基準点 q を決めたときにはじめて定まるものであり、$g<h$ の時、またこの時に限り、$g(q)<h(q)$を満たす。

　Dubrovina と Dubrovin は、n 本の糸のなすブレイドの作る群 B_n 上の左順序集合 $LO(B_n)$ を研究し、特に B_n 上の孤立的左順序を構成した。つまり、$LO(B_n)$は、孤立点を持つことを示した。孤立順序の力学的実現はある種の構造安定性を有している。

２．研究の目的

加算群 G に対し上に定めた空間 LO(G)の位相空間としての様子はあまり詳しくはわかっておらず、これを深く理解するのが目的である。調べたいことは、大きく二つに分けることができる。

　その一つは、一般の群 G に対し、LO(G)がいつも（群 G によらず）もつ性質を調べ上げることである。この方面の研究は始まったばかりであり、一般論がいまだ十分に確立されておらず、初歩的な性質の研究は、第一にやらねばならないことである。特に G の孤立順序の力学的実現は、孤立であるがゆえの特別な性質をもつであろうと考えられる。力学的実現は、G の実直線への作用を与えるものであり、それが孤立性の影響をどう受けるのかは、力学系研究者にとっては大変興味深い問題である。

　もう一つの問題は加算群 G を、何か特別に興味深いものに制限したときに現れる性質の解明である。１でも例として挙げたブレイド群 B_n などについて深い研究を行いたい。また、この群と密接に関連する群として写像類群というものがある。これについても研究を行いたい。

３．研究の方法

１で、加算群 G に対する左順序の空間 LO(G)が、いかに群 G の実直線上の作用と結びついているかについて述べた。しかし実は実直線上の作用よりは円周上の作用の方ｄが、より多く研究されており、深い結果も多い。しかもある群 G の実直線上への作用と、その群 G と関係の深い他の群 H の円周上への作用が、一対一に対応づけられているということが、往々にして起こる。そこで、群 H の円周上への作用と関連して「左不変円順序」というものを考える。これは H の異なる元の三つ組み(h_1,h_2,h_3)に対し１か-1 を対応させるものであり次の条件（1）と（2）を満たすもののことである。

（1）　$c(g_2,g_3,g_4)-c(g_1,g_3,g_4)+c(g_1,g_2,g_4)-c(g_1,g_2,g_3)=0.$

（2）　$c(g_4g_1,g_4g_2,g_4g_3)=c(g_1,g_2,g_3).$

群 H の左不変円順序の全体を CO(H)で表すこととする。本研究の方法は、かいつまんで言うと、群 G に関連して LO（G）＝CO(H)となっている他の群 H を見つけてきて、CO(H)を円周上への作用と関連させて調べることである。

４．研究成果

主要な研究成果は、次のように分類される。

（1）　群 G の左順序を直線上の力学系とみなした時の孤立左順序の持つ力学系的特徴は何かを調べること。

（2）　群ＰＳＬ（２，Ｚ）の孤立円順序の例を豊富に構成すること。

（3）　平面上のアノソフ写像の構成

（4）　加算群の不変生成性の研究

ここでは、このうち（1）に話題を絞ってその内容を詳しく紹介したい。

（1）　孤立左順序の力学系の特徴：

まず加算群 G 上に左順序＜が与えられたとき、その力学的実現 $p: G \dashrightarrow \mathrm{Homeo}(R)$の構成法を述べよう。ここに Homeo(R)とは実直線 R から R への向きを保つ同相写像のつくる群のことである。

まず群 G の元全体を数え上げて、$g_1=e$，g_2，$g_3,\cdots$と名前付けを行っておく。次に群 G を実直線の中に次のように埋め込んでおく。つまり、単射 $i:G\to R$ を定めておく。単射 i は帰納的に定義する。すなわち、g_1 の行先 $i(g_1)$をまず適当に定める。次に g_2 の行先 $i(g_2)$は、$g_2>g_1$ ならば、$i(g_2)=i(g_1)+1$ と定め、$g_2<g_1$ ならば、$i(g_2)=i(g_1)-1$ と定める。一般に g_k の行先 $i(g_k)$まで定まっているとき g_{k+1} の行先 $i(g_{k+1})$は、次のように定める。$g_1,\cdots,g_k$ の R への行先はすでに定まっているのでそれを大きさの順に並べておく。つまり、$g_{i_1}<\cdots.<g_{i_k}$ としておく。もしも $g_{k+1}<g_{i_1}$ ならば、$i(g_{k+1})=i(g_1)-1$ とし、また、もしも $g_{k+1}>g_{i_k}$ ならば、$i(g_{k+1})=i(g_k)+1$ とする。最後に $g_{i_n}<g_{k+1}<g_{i_n+1}$ であるならば $i(g_{k+1})=(1/2)(i(g_n)+i(g_{n+1}))$と定める。

これにより、帰納的に埋め込み $i:G\to R$ が群 G 全体上で定まる。以上の準備の下に力学的実現 $G\to \mathrm{Homeo}(R)$を次のように定義する。G の元は群の左作用により群 G 上に作用する。従って G の埋め込み $i(G)$上への作用を導く。それは R の順序を保存する作用である。また $i(G)$は実直線 R の格子となっている。従って、各元の作用は線形性により R 全体上への作用へと拡張する。これを G 上の左不変順序の力学的実現という。

次にこうして得られる作用の持つ特別の性質を列挙しよう。そのために $i(e)$が特別の役割を果たすので、この点を x_0 と表しておく。この時、左不変順序$<$の力学的実現 $p:G\to \mathrm{Homeo}(R)$は次の性質を持つ。

① p は x_0 において自由である。すなわち、x_0 を不動とする G の元は単位元以外にない。
② x_0 の軌道は上にも下にも非有界である。
③ x_0 の軌道の閉包と区間$[a,b]$との共通部分が両端点 a,b のみのとき、a,b は x_0 の軌道上にある。

以上は任意の左不変順序の力学的実現の満たす性質であるが、逆に上の①、②、③を満たす作用 $p:G\to \mathrm{Homeo}(R)$は、何かある左不変順序の力学的実現であるということが成り立つ。
さて、我々の主題である孤立左順序についてはその力学的実現はどんな特別の性質を持つのか？これを調べることが我々の問題であった。これについて次の結果を得た。

定理１．孤立左順序の力学的実現は余コンパクトである。つまりあるコンパクト区間 I が存在して、すべての軌道は I と交わる。

実は群 G が有限生成でありさえすれば、その任意の左不変順序の力学的実現は余コンパクトである。この場合定理１は何も主張していないことになる。従って定理１が意味を持つのは G が無限生成の場合のみである。ともあれ、定理１により、左順序が孤立していれば、その力学的実現は極小集合 M を持つことがわかる。さらに G が整数全体のなす群 Z と同型でないかぎり、極小集合は一意的に定まる。

定理 2.極小集合 M が R 全体に一致するとき、G は有理数全体のなす群の部分群と同型である。

加算群 G 上に左不変順序が与えられたとき、次の性質を満たす部分群 H を凸部分群という: h_1,h_2 を H の元として、群 G の元 g が $h_1<g<h_2$ を満たすならば、g は H の元である。凸部分群の全体は包含関係に関して全順序集合となっている。

定理 3.左順序が孤立の時、それに関する凸部分群は有限個しか存在しない。

孤立左順序の一般論は以上であり、以下は特別の群についての研究である。群 G として、$G=B_3$ をとる。これは３糸の組みひも群であり、具体的には２つの元 a,b で生成され、関係式 $a^2=b^3$ を持つものである。この群をその中心で割った群を H とする。H は元 a_1,b_1 で生成され関係式 $a_1^2=b_1^3=1$ を持つ群である。H は、２行２列の整数係数の行列のなす群をその中心で割った群 $PSL(2,Z)$と同型である。全射準同型 $q:G\to H$ が自然に定まる。この時、次が成り立つ。

定理 4.準同型 q は同相写像 $q_*:LO(G)\to CO(H)$を導く。

この定理により、空間 $LO(B_3)$を調べるためには空間 $CO(PSL(2,Z))$を調べればよいことがわかる。この方法により、$LO(B_3)$の多くの孤立点を極めて具体的に構成することができたのである。以下で得られた結果について少し詳しく説明しよう。以下で群 G とは $PSL(2,R)$ のことであり、生成元は a と b であり、関係式 $a^2=b^3=1$ が成立している。この群に対して、次が成立する。

命題１.(1) G の元は、単位元を除くと、位数が２か、３か∞である。位数２の任意の元は a と共役であり、位数３の任意の元は b かまたは b^{-1} と共役である。
(2) G の任意の部分群で有限位数の元を持たないものは、自由群と同型である。
(3) G の可換化部分群 $[G,G]$は自由群と同型であり、その生成元として $abab^{-1}$ と $ab^{-1}ab$ をと

ることができる。
(4)G の任意の自己同型写像は PGL(2,Z)の元による共役で与えられる。従って G の外部自己同型群 Out(G)は Z/2Z と同型である。その生成元ｓは次で与えられる:s(a)=a，s(b)=b^-1>.

さて、c を G の孤立円順序とし p:G->Homeo(S^1)を c の力学的実現とする。また x_0 を p の基準点とする。
　命題 2.p は唯一の極小集合 M をもつ。
M はカントール集合と同相である。基準点 x_0 は M の外の点である。x_0 を含む M のギャップを I とすると、すべてのギャップは I の軌道であり、また I の安定化群 G_I は無限巡回群である。

　G の孤立円順序の力学的実現を模式的に実現するものとしてマルコフ系(a,b,[a],[b],[b^-1])を考える。ここに a は S^1 の向きを保つ位数２の同相写像、b は位数３の同相写像、[a],[b],[b^-1 は S^1 の部分集合であり、一定の性質を満たすものである。
　このとき、マルコフ系と孤立円順序は１対１に対応することを示すことができる。これを用いて G の孤立円順序を分類することができた。結果として、G の孤立円順序は豊富に存在することが分かった。前述のように G の孤立円順序はブレイド群 B_3 の孤立左不変順序と１対１に対応するので、最終結論として

「ブレイド群 B_3 の孤立左不変順序は豊富に存在する」ことが分かった。ただし、有限個である。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 David Sinnou, Hirata-Kohno Noriko, Kawashima Makoto	4．巻 23(5)
2．論文標題 Linear forms in polylogarithms	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Ann. Sc. Norm. Supp. Pisa Cl. Sci	6．最初と最後の頁 1447-1490
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 David Sinnou, Hirata-Kohno Noriko, Kawashima Makoto	4．巻 206
2．論文標題 Linear independence criteria for generalized polylogarithms with distinct shifts	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Acta Arith.	6．最初と最後の頁 127-169
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Shigenori Matsumoto	4．巻 15
2．論文標題 Isolated circular orders of PSL(2,Z)	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Groups, Geometry and Dynamics	6．最初と最後の頁 1421-1448
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/GGD/635	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Noriko Hirata-Kohno	4．巻 34
2．論文標題 Diophantine Approximation	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Exposition, American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 205-229
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/suga/463	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Shigenori Matsumoto	4．巻 41
2．論文標題 An example of planar Anosov diffeomorphisms without fixed points	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6．最初と最後の頁 923-934
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/etds.2019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Yoshifumi Matsuda and Shigenori Matsumoto	4．巻 149
2．論文標題 Invariable generations of certain groups of piecewise linear homeomorphisms of the intervals	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15277	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Sinnou David, Noriko Hirata-Kohno and Makoto Kawashima	4．巻 9
2．論文標題 Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent?	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory	6．最初と最後の頁 389-406
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/moscow.2020.9.389	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Shigenori Matsumoto	4．巻 72
2．論文標題 Dynamics of isolated orders	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Society of Japan	6．最初と最後の頁 185-211
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/77357735	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 Sinnou David, Noriko Hirata-Kohno and Makoto Kawashima
2．発表標題 Algebraic approach towards analytic methods for the irrationality
3．学会等名 Analytic Number Theory and Related Topics (RIMS workshop), Kyoto University（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 Noriko Hirata-Kohno, Sinnou David and Makoto Kawashima
2．発表標題 Idetities for pi discovered by S. Ramanujan and visualization via Mathematica
3．学会等名 Study of Mathematical Softwear and Its Effective Use for Mathematics Education (RIMS workshop), Kyoto University（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 松元　重則
2．発表標題 An example of Anosov diffeomorphisms of the plane
3．学会等名 冬の力学系研究集会（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 S. Matsumoto
2．発表標題 Works of Patrice Le Calvez
3．学会等名 Surface Dynamics, Montevideo, Urugay（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	平田　典子（河野典子） (HIRATA Noriko) (90215195)	日本大学・理工学部・特任教授 (32665)	
研究分担者	西川　貴雄 (NISHIKAWA Takao) (10386005)	日本大学・理工学部・准教授 (32665)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関