様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １１ 日現在

機関番号：１１５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３３１８

研究課題名（和文）差分方程式の解の微分代数的・差分代数的性質

研究課題名（英文）Differential/difference algebraic properties of solutions of difference equations

研究代表者
西岡　斉治（NISHIOKA, Seiji）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：１０６３２２２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：関数がなんらかの代数的微分方程式をみたすことを微分代数的といい、そうでないとき超超越的という。三角関数は微分代数的であり、ガンマ関数は超超越的である。
cos(x)の倍角公式のような形の非定数係数差分方程式に対して、微分代数的な超越関数解が存在するための必要十分条件を得た。条件は係数のみの関係式で記述される簡潔なものである。この成果はポワンカレの乗法公式（ｑ差分方程式）や超越数論で現れるマーラー型差分方程式にも適用可能である。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ポワンカレは倍角公式を大幅に一般化する乗法的公式のシステムを考え、その有理型関数解を構成した。ポワンカレが提唱したのは方程式のシステムであるものの、方程式が１本の場合に対してのみ有理型関数解の超超越性がRittにより研究され、その場合に微分代数的なのは楕円関数の類しかないという主張がされた。この主張は何度か再証明されているようである。
本研究成果は２本の方程式からなるポワンカレのシステムの一例を扱ったものと言え、そのため対象となる差分方程式が定数係数から非定数係数に変わっている。

研究成果の概要（英文）：Functions which satisfies algebraic differential equations are said to be differentially algebraic, and the other functions transcendentally transcendental. The trigonometric functions are differentially algebraic, and the gamma function is transcendentally transcendental.
For a certain difference equation with non-constant coefficients resembling the double angle formula of the cosine, a necessary and sufficient condition for the existence of differentially algebraic and transcendental solutions was obtained. The condition is only a single relation between the coefficients. The result is also applicable to Poincare's multiplication theorems, or q-difference equations, and difference equations of Mahler type.

研究分野：差分代数

キーワード：超超越性　微分超越性　差分方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

三角関数、ペー関数は微分方程式をみたすだけでなく加法公式や倍角公式等をもつ。これは $f(x+\delta)$ と $f(x)$ 、あるいは $f(2x)$ と $f(x)$ がみたす代数関係式が存在することを意味する。前者は通常の差分方程式であり、後者は $q=2$ の場合の q 差分方程式である。これらをまとめて差分方程式と呼ぶことにする。三角関数、ペー関数のような、微分方程式と差分方程式を同時にみたす関数とはどのような関数であろうか。この問題に関して、差分方程式の解が代数的微分方程式をみたすかという形での研究が行われてきた。先駆者はヘルダーであり、彼は 1886 年、ガンマ関数が代数的微分方程式をみたさないことを証明した。これをガンマ関数の超超越性という。証明はガンマ関数がみたすよく知られた 1 階線形差分方程式に基づいている。その後、様々な形の差分方程式の解について、その超超越性が論じられてきた。中には

$$f(z^d) = f(z) - z$$

のようなマーラー型差分方程式に対する研究もある。近年では線形差分方程式のガロワ理論が発展し、通常の差分、q 差分、マーラー型それぞれの差分方程式に対して、解の超超越性とガロワ群との関係が明らかになっていた。

他方、非線形の差分方程式については、解の超超越性に関するガロワ理論は存在しないが、いくつかの研究があった。Tietze は 1905 年、リッカチ方程式の差分版である

$$\varphi(x+1) = \frac{A(x)\varphi(x) + B(x)}{C(x)\varphi(x) + D(x)}$$

（A, B, C, D は有理関数）に対して一般的な結果を得た。Tietze の証明手法は筆者により代数化され、一般の差分に関する差分リッカチ方程式にも通用することが明らかとなっている。ただし、差分リッカチ方程式は微分の場合と同様に 2 階線形差分方程式と対応するため、差分の種類が限られるもののガロワ理論によっても研究可能である。

また、Ritt は 1926 年、ポワンカレの乗法公式と呼ばれる方程式のうち

$$y(mx) = R\big(y(x)\big)$$

（R は線型でない有理関数）という最も単純なものについて、これをみたす $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $y(x)$ が代数的微分方程式をみたすなら、指数関数、三角関数、ペー関数程度であると述べた。さらに、高野は 1973 年、木村による非線形差分方程式

$$y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}$$

（$\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$）の非自明な有理型関数解について、Tietze や Ritt とは異なる方法で超超越性を研究した。

Ritt も高野も定数係数のみ扱っていることに注意する。Ritt が扱ったポワンカレの乗法公式は、一般に連立有理的差分方程式に一定の条件を加えたものであり、非自明な $\mathbb{C}$ 上の有理型関数解をもつ。Ritt の研究は本来連立なものの一本しかない場合であり、一般の場合どうなるかは自然な疑問であろう。例えば二本にすれば有理関数係数の 1 階有理的差分方程式である

$$y(mx) = R(x, y(x))$$

（R は 2 変数有理関数）を作ることができる。これは上述の差分リッカチ方程式を含むが、それ以外の場合にどのような結果が得られるのか、当初も今もよくわかっていない。

線形差分方程式のガロワ理論は、四則演算と差分が定義された集合（差分環・体）のピカール・ヴェシオ拡大に関する理論である。微分方程式の場合、ピカール・ヴェシオ拡大の概念を拡張した Kolchin-Kovacic の強正規拡大が存在する。代数拡大と組み合わせることで、これは線形差分方程式の解だけでなく、代数関数、楕円関数、アーベル関数との合成関数（梅村の古典関数という）も扱うことができる。近年、Wibmer により強正規拡大のガロワ理論が差分化されたが、具体例が乏しく、どのような差分方程式の解が強正規拡大を生成し得るのかが問題である。また、非線形差分方程式の解の超超越性との関連もわかっていない。

２．研究の目的

本研究の第一の目的は、1 階有理的差分方程式の解が、代数的微分方程式をみたすのはどのような場合かを明らかにすることであった。線形差分方程式に対してはガロワ理論による研究が行われているが、非線形差分方程式の解の超超越性はガロワ理論の対象外である。ゆえに、古典的な手法を発掘・再評価しながら、それを手がかりとして研究を進めたいと考えた。

第二の目的は、四則演算と差分が定義された集合（差分環・体）の強正規拡大について、その具体例を豊富にすることであった。強正規拡大のガロワ理論は、線形差分方程式に関するピカール・ヴェシオ拡大によるガロワ理論を拡張したものであり、ある程度の非線形差分方程式を扱え

るはずである。実際、ペー関数が強正規拡大を生成する。他にどのような例があるかというのが問題である。

３．研究の方法

上述のポワンカレの乗法公式から作られるような有理関数係数の 1 階有理的差分方程式に対して、解が超超越的であるための条件を得たいということであった。Tietze と Ritt の研究を見比べると、ある程度の類似性が見られるため、代数化で明らかになった Tietze の証明手法をリッカチ型でない場合にどこまで援用できるか確かめることになる。Tietze の定理とその代数化では、係数から定まる 3 階線形差分方程式に有理関数解が存在するかどうかという問題に還元された。同様に、方程式の係数から決まる何らかの差分方程式に対する有理関数解の存在・不在が条件になると期待した。

なお、定数係数であっても q 差分の場合を除いて一般的な結果がない。高野の手法は逆関数を用いるため定数係数の場合のみ適用可能であるが、差分は一般化可能に思えた。この方向からの研究も行うことを想定した。

強正規拡大については、差分でもペー関数が複素数体 $\mathbb{C}$ 上の強正規拡大を生成することは知られており、これは超越次数１の例である。ただし、差分では微分のように合成関数を扱うことができない。従って係数体を $\mathbb{C}$ より大きくした場合（既知の関数を増やした場合）にどのような強正規拡大があり得るのかを調べることにした。また、$\mathbb{C}$ 上であっても超越次数 2 の例は見当たらないため、こちらで例を探すことも考えられた。

４．研究成果

研究期間全体を通じて、主に１階有理的差分方程式の解の超超越性を研究した。超超越性とは、いかなる代数的微分方程式の解にもならないという性質で、伝統的な用語である。上述のようにガンマ関数が代表例である。今日では微分超越的という言い方もあり、そうでないとき微分代数的という。１階有理的差分方程式の身近な例としては、コサイン関数や楕円関数の倍角公式がある。どちらの関数も１階代数的微分方程式の解になるため、微分代数的である。ポワンカレは倍角公式を大幅に一般化する乗法的公式のシステムを考え、その有理型関数解を構成した。ポワンカレが提唱したのは方程式のシステムであるものの、方程式が一本の場合に対してのみ有理型関数解の超超越性が Ritt により研究され、その場合に微分代数的なのは楕円関数の類しかないという主張がされた。この主張は何度か再証明されているようである。

ポワンカレの乗法公式は、方程式が一本の場合は定数係数 1 階有理的 q 差分方程式になる。方程式が二本の場合で、そのうちの一本を独立変数に充てれば、非定数係数１階有理的 q 差分方程式が現れる。それはポワンカレにより有理型関数解の存在が保証されている。

本研究では当初から超超越性に関連する古い先行研究をいくつか取り上げ、それらの研究手法を長期間にわたって精査した。しかし特に重要と思われる 3 編のうち Ritt のものを除いた 2 編に対して重大な誤りを見つけた。誤りがあるのはそれぞれ全く別の箇所であるが、いずれも議論の継続を困難にするものであった。Ritt の論文はこれら 2 編とは議論の仕方が違うこともあり、精読にさらに時間がかかっていたところ、ようやく誤りを発見した。

そういった事情により結果的には異なる手法で研究を進め、次の形の１階有理的差分方程式

$$\tau(y(x)) = a(x)y(x)^d + c(x)$$

（$\tau(y(x))$ は $y(x+1), y(mx), y(x^2)$ 等で、 d は 2 以上の自然数）に対して微分代数的な超越関数解が存在するための必要十分条件を得た。条件は

$$d\frac{c'}{c} = \frac{\left(\tau\left(\frac{c}{a}\right)\right)'}{\tau\left(\frac{c}{a}\right)}$$

という係数のみの関係式で記述される簡潔なものである。この成果は非定数係数の方程式に対して有用であり、ポワンカレの乗法公式（q 差分方程式）や超越数論で現れるマーラー型差分方程式にも適用可能である。なお、$d = 2$ とした形はリッカチ方程式にオイラー法の差分化を施すことで得られる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Nishioka Seiji	４．巻 77
２．論文標題 Differential Transcendence of Solutions of the Difference Equation $$\Delta y=ay^2+by+c$$	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Results in Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00025-022-01731-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関