

令和 4 年 6 月 8 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03326

研究課題名（和文）モノドロミー保存変形のタウ関数と無限次元代数の表現論

研究課題名（英文）Isomonodromic tau-functions and representation theory of infinite dimensional algebras

研究代表者

名古屋 創（Nagoya, Hajime）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：80447367

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、モノドロミー保存変形のタウ関数のフーリエ展開を Virasoro 代数等の無限次元代数の表現論を用いて構成することが目標であった。まず、第4、5 Painlevé方程式のタウ関数の無限遠点における展開が不確定共形ブロックで表示されることを退化操作を用いて示した。super Virasoro 代数に対する不確定頂点作用素も導入し、super Virasoro 代数の不確定 Verma 加群が二つの Virasoro 代数の直和に対する不確定 Verma 加群の無限和に分解することも示した。また、q-差分 Painlevé方程式のタウ関数に対しても q-共形ブロックを用いた表示を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

第4、5 Painlevé方程式のタウ関数を不確定共形ブロックで表示できることを示したことは、Painlevé方程式と共形場理論の間にある不思議な関係の理解を深め、すべての Painlevé方程式のタウ関数が共形ブロックで表示されるという予想の証明に向けて確かな礎となる。super Virasoro 代数に対して不確定頂点作用素を導入できたことによって、一般の無限次元代数に対する不確定頂点作用素の定義、性質が明らかになりつつある。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is construction of Fourier expansions of tau functions of monodromy preserving deformation by representation theory of infinite dimensional algebras, such as Virasoro algebra. Firstly, we proved that the tau functions of the fourth and fifth Painlevé equations are expressed by irregular conformal blocks using limiting procedure. Secondly, we introduce irregular vertex operators for a super Virasoro algebra and proved the decomposition of irregular Verma module of a super Virasoro algebra into an infinite sum of irregular Verma module of two Virasoro algebras. Thirdly, we gave Fourier expansions of tau functions of q-difference Painlevé equations in terms of q-conformal blocks.

研究分野：可積分系

キーワード：conformal field theory Painlevé equations Virasoro algebra

1. 研究開始当初の背景

(1) 超幾何関数や楕円関数などの特殊関数を超える新しい特殊関数を見出すという 19 世紀数学の一つの問題意識のもと、P. Painlevé は動く分岐点をもたない 2 階非線形常微分方程式を研究することで、パンルヴェ方程式と呼ばれる 2 階の非線形常微分方程式を 1900 年に発見した。その後、確定特異点型のある 2 階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する微分方程式として、第 6 パンルヴェ方程式 PVI が R. Fuchs によって導出された。パンルヴェ方程式は、方程式に含まれるパラメータが特殊な値をとるとき特殊解として、ガウスの超幾何関数に代表される超幾何関数ファミリーや代数解をもつ。一般には、それらの古典特殊関数では表せない超越関数を解にもつことが知られている。

(2) 楕円関数がテータ関数の比で表されるように、第 1 パンルヴェ方程式 PI の一般解が、二つの整関数の比で表わされることを P. Painlevé が示している。今では、全てのパンルヴェ方程式がそのハミルトニアン H から導入されるタウ関数 $\tau(t)$ を用いて、二つの整関数の比で表されることがわかっている。テータ関数は明示的な級数表示で定義されるが、パンルヴェ方程式のタウ関数の級数表示については、2012 年に共形場理論の中心荷電が 1 である共形ブロックを用いた明示的な表示が発見された (Gamayun, Iorgov, Lisovyy, JHEP, 2012)。共形場理論の共形ブロックとゲージ理論の Nekrasov 分配関数が一致するという AGT 対応により、共形ブロックもヤング図形を用いて明示的に書けることが知られている。

(3) PVI のタウ関数が共形場理論の共形ブロックで表されることの証明については、2014 年に、共形場理論を用いて、モノドロミー保存変形により PVI を導く線形微分方程式の波動関数を構成することで、一つの証明が与えられた (Iorgov, Lisovyy, Teschner, Comm. Math. Phys., 2014)。これは、モノドロミー保存変形のタウ関数はその線形微分方程式の波動関数から導かれるという事実 (Jimbo, Miwa, Ueno, Physica 2D, 1981) に基づいている。一方で、パンルヴェ方程式のタウ関数はある双線形方程式で特徴付けられることが知られており、共形場理論の共形ブロックを用いて定義された $\tau(t)$ がその双線形方程式を満たすことが Virasoro 代数の表現論を用いて示された (Bershtein, Shchekkin, Comm. Math. Phys., 2014)。他のパンルヴェ方程式のタウ関数の明示的な級数表示については、PVI のタウ関数に退化操作を行うことによって、第 3,5 パンルヴェ方程式のタウ関数の確定特異点の周りでの展開の明示的な級数表示が得られていた (Gamayun, Iorgov, Lisovyy, J. Phys. A, 2013)。不確定特異点におけるパンルヴェ方程式のタウ関数の級数展開については、PV, PIV について不確定共形ブロックによる予想が与えられた (Nagoya, J. Math. Phys., 2015)。さらに、第 6 パンルヴェ方程式の q -差分版である q -PVI についてもそのタウ関数が q -共形ブロックで表されることが示されている (Jimbo, Nagoya, Sakai, J. Int. Sys., 2017)。

2. 研究の目的

本研究では、パンルヴェ方程式のタウ関数、あるいは一般にモノドロミー保存変形のタウ関数やパンルヴェ方程式の差分版のタウ関数がフーリエ展開の形で表されることを証明する。用いる手段は Virasoro 代数や W 代数等の無限次元代数の表現論である。現在までに得られている結果を踏まえると、共形場理論における共形ブロックを用いてフーリエ展開されることが期待される。共形ブロックは Virasoro 代数や W 代数の表現空間上の確定特異点型および不確定特異点型の頂点作用素の期待値として定義される関数である。今までにも幾つかの場合に頂点作用素が定義されてきたが、モノドロミー保存変形のタウ関数を表すには十分でない。特に、不確定特異点型の頂点作用素は私が定義した Virasoro 代数の不確定 Verma 加群上の頂点作用素しか知られていない。これらの頂点作用素は第 4,5 パンルヴェ方程式のタウ関数を共形ブロックのフーリエ変換として表示するのに使われた。モノドロミー保存変形のタウ関数を表示するための関数として共形ブロックを定義する。このために、適切に Virasoro 代数や W 代数等の無限次元代数の表現論を深化させる。

3. 研究の方法

(1) Virasoro 代数や W 代数の表現空間上の確定特異点型および不確定特異点型の頂点作用素を適切に定義し、それらが存在することを証明する。

(2)(1)で定義された頂点作用素が一意的であることは期待できない。例えば、確定特異点型であれば共形場理論の共形対称性を由来とする Virasoro 代数と頂点作用素の交換関係式から頂点作用素は一意的に決まるが、第 2,3 パンルヴェ方程式のタウ関数を表示するための Virasoro 代数の不確定 Verma 加群上の頂点作用素はその交換関係式からは一意的に決まらない。従って、さらに条件を課す必要がある。パンルヴェ方程式のタウ関数は双線型微分方程式

の解として定義される。共形ブロックのフーリエ変換がその双線型微分方程式をみたすならば、共形ブロックを定義する頂点作用素も双線型微分方程式に相当する関係式をみたすはずである。そこで、Virasoro 代数の頂点作用素のみたすべき関係式を明らかにして、その関係式をみたすものとして頂点作用素を定義することを目指す。その後、新たに得られた頂点作用素の期待値として定義される共形ブロックのフーリエ変換が対応する双線型微分方程式を満たすことを証明する。

(3) パンルヴェ方程式の場合に用いた Virasoro 代数の頂点作用素の関係式を W 代数の頂点作用素の関係式にどのように一般化したら良いかを明らかにする。Virasoro 代数のときと同様に、新たに得られた頂点作用素の期待値として定義される共形ブロックのフーリエ変換が対応する双線型微分方程式を満たすことを証明する。

(4) Virasoro 代数や W 代数等の無限次元代数の表現論から得られる双線型微分方程式とモノドロミー保存変形のタウ関数がみたす双線型微分方程式との対応関係を明らかにする。

4. 研究成果

(1) Lisovyy, J. Roussillon 氏との共同研究で、Virasoro 代数の Verma 加群上の頂点作用素の退化として、ランク 1 の不確定特異点型 Verma 加群上の不確定特異点型頂点作用素を得た。このことから、確定特異点型共形ブロックのフーリエ変換で表される第六パンルヴェ方程式のタウ関数の無限遠点における退化操作が正当化され、退化によって、2015 年に自身によって予想されていた第 5 パンルヴェ方程式のタウ関数の不確定特異点型共形ブロックのフーリエ変換による表示を得た。同時に、第 5 パンルヴェ方程式のタウ関数の原点における展開と無限遠点における展開の間の接続公式の予想も得た。

(2) 松平氏との共同研究で、2017 年に神保・名古屋・坂井によって得られた q -PVI のタウ関数を q 共形ブロックのフーリエ変換で表すという結果に関して、その退化操作を考察することで、 q -PV、 q -PIII のタウ関数の明示的な表示を得た。また、 q -PVI のタウ関数の 4 項間双線形方程式の退化操作をとることで、 q -PIII のタウ関数のみたす 3 項間双線形方程式を得た。

(3) 松平氏との共同研究で、次の結果を得た。2018 年に Iorgov, Gavrylenko, Lisovyy により藤・鈴木・津田系のタウ関数が共形場理論から導出されたが、一般化超幾何関数の 0 と無限遠点における基本解に対する接続行列の周期性が効果的に用いられていた。一般化超幾何関数には、0 と 1 と無限遠点の三個の特異点があり、0 と無限遠点における基本解に対する接続行列が三角関数の積で表示されるということが知られていた。0 と 1 における基本解に対する接続行列も三角関数の積で表示されることが期待される。我々は、既知の 0 と無限遠点における基本解の積分表示および接続公式を解析接続することで 0 と 1 における基本解に対する接続行列が三角関数の積で表示されることを証明した。

(4) 2017 年に神保・名古屋・坂井によって得られた q -PVI のタウ関数を 5 次元 Nekrasov 関数のフーリエ変換で表示するという結果を拡張した。すなわち、 q -PVI の一般化である q -藤・鈴木・津田系のタウ関数を 5 次元 Nekrasov 関数のフーリエ変換で構成した。タウ関数の構成には、高階の q 差分線形方程式のモノドロミー保存変形の基本解を特殊化した 5 次元ネクラソフ関数のフーリエ変換で構成することで得た。Lax 形式を利用することで、5 次元ネクラソフ関数で表示されたタウ関数に対する行列式公式も得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Matsuhira Yuya, Nagoya Hajime	4. 巻 64
2. 論文標題 Connection Problem for the Generalized Hypergeometric Function	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 323 ~ 348
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1619/fesi.64.323	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hajime Nagoya	4. 巻 -
2. 論文標題 On q-isomonodromic deformations and q-Nekrasov functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2021.050	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yuya Matsuhira and Hajime Nagoya	4. 巻 15
2. 論文標題 Combinatorial Expressions for the Tau Functions of q-Painleve V and III Equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2019.074	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 O. Lisovyy, H. Nagoya, J. Roussillon	4. 巻 59
2. 論文標題 Irregular conformal blocks and connection formulae for Painleve V functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5031841	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Nagoya	4. 巻 -
2. 論文標題 Remarks on irregular conformal blocks and Painleve III and II tau functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and Related Topics	6. 最初と最後の頁 105-124
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Hajime Nagoya
2. 発表標題 Irregular conformal blocks and Painleve equations
3. 学会等名 RIMS研究集会「完全WKB 解析, 超局所解析, パンルヴェ方程式とその周辺」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hajime Nagoya
2. 発表標題 Irregular conformal blocks and Painleve tau functions
3. 学会等名 XI Workshop on Geometric Correspondences of Gauge Theories (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 名古屋 創
2. 発表標題 不確定特異点型共形ブロックとパンルヴェ方程式
3. 学会等名 RIMS研究集会「可積分系数理の諸相」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hajime Nagoya
2. 発表標題 Irregular conformal blocks and Painleve tau functions
3. 学会等名 Randomness, Integrability and Representation Theory in Quantum Field Theory 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 名古屋創
2. 発表標題 On connection problem of q-conformal blocks and its application
3. 学会等名 The 15th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Application (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 名古屋創
2. 発表標題 Determinant formulas for tau functions of q-Painleve systems in terms of q-Nekrasov partition functions
3. 学会等名 China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 名古屋創
2. 発表標題 Determinant formulas for tau functions of q-Painleve systems in terms of q-Nekrasov partition functions
3. 学会等名 Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 名古屋創
2. 発表標題 On q-isomonodromic deformations and q-Nekrasov functions
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 名古屋 創
2. 発表標題 共形場理論とパンルヴェ方程式
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------