

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03335

研究課題名（和文）正則ヒルベルト空間の巡回ベクトルの研究

研究課題名（英文）Cyclic vectors in analytic Hilbert spaces

研究代表者

泉池 耕平（Izuchi, Kouhei）

山口大学・教育学部・准教授

研究者番号：90451434

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：正則関数からなるヒルベルト空間の巡回ベクトルについて研究を行った。巡回ベクトルを考察するうえで、その空間の不変部分空間の構造を知ることは非常に重要である。本研究課題では、正則ヒルベルト空間の中でも、特にハーディ空間、ベルグマン空間、整関数からなるヒルベルト空間の巡回ベクトル及び不変部分空間について研究を行った。

n次元複素空間上の整関数からなるあるヒルベルト空間において、巡回ベクトルの完全な特徴づけを行った。また、2変数ハーディ空間のある不変部分空間についての研究を行い、ある作用素におけるランクの特徴づけを行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

正則ヒルベルト空間の巡回ベクトルの研究には数学における重要な問題と関連するものがあり、これらを研究する意義は大きい。特にハーディ空間、ベルグマン空間、フォック空間は正則ヒルベルト空間の中でも基本となる空間であり、研究が最も盛んに行われている空間である。その中で一部ではあるが不変部分空間の性質を明らかにしたことは、今後より重要な問題の解決につながる可能性があり、十分に意義があるものである。

研究成果の概要（英文）：Cyclic vectors in Hilbert spaces of analytic functions have been studied. To study it, it is significant to know the structure of invariant subspaces in the space. Here, we have studied them especially in Hardy spaces, Bergman spaces and some Hilbert spaces of entire functions.

In some Hilbert spaces of entire functions on the n-complex space, we characterized cyclic vectors completely.

Also we studied some invariant subspaces in Hardy space over the bidisk. We characterized the rank of the fringe operators for them.

研究分野：関数解析学，複素解析学

キーワード：ヒルベルト空間 正則関数 巡回ベクトル 不変部分空間

## 1. 研究開始当初の背景

正則関数からなるヒルベルト空間における不変部分空間の研究の草分けとして、Beurling による 1 変数ハーディ空間の不変部分空間の完全な特徴付けがある。この結果はその後の作用素論の研究に大きな影響を与え、様々な空間の不変部分空間の研究へと繋がっている。その不変部分空間の研究と密接に関係しているものとして、本研究のテーマである巡回ベクトルがある。巡回ベクトルを 1 つでも含む不変部分空間は空間全体のみであり、そのため不変部分空間の構造を知る上で巡回ベクトルについて知ることは重要な役割を果たすと考えられている。それゆえ、巡回ベクトルの研究もまた非常に盛んに行われている。しかし、1 変数ハーディ空間以外に本質的に不変部分空間の構造が解明されているものはなく、巡回ベクトルについても本研究代表者による整関数からなる 1 変数フォック空間での完全な特徴付けなどあるもののほとんどその構造を解明されているものがない状況であった。

(1) 多変数ハーディ空間は 1 変数ハーディ空間と比べ、ネジレのようなものがあり、構造としてかなり複雑になる。これまでに不変部分空間の研究は数多くあるものの、巡回ベクトルに関する研究は少なく、実際に Nikolskii によって巡回ベクトルについて本質的な結果がないことが指摘されていた。

(2) ベルグマン空間の巡回ベクトルについては、ハーディ空間の巡回ベクトルがもつ性質を用いた特徴付けが Aleman-Richter-Sundberg によって与えられている。しかし、不変部分空間の構造について未知なことが多く、より巡回ベクトルの構造がわかる形での特徴付けが求められている。その中で、ベルグマン空間と同様に面積測度によって定義される整関数からなるヒルベルト空間であるフォック空間については、その巡回ベクトルの完全な特徴付けが得られている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的として、次の 2 つがある。

- (1) 2 変数ハーディ空間の巡回ベクトルについての考察
- (2) 整関数からなるヒルベルト空間の巡回ベクトルの特徴付け

(1) については、巡回ベクトルである良い条件を探ることであった。2 変数ハーディ空間の不変部分空間の研究結果をもとに考察する。(2) については 1 変数での結果から、多変数の場合でも他の空間と比べ比較的単純であると予想され、特徴付けを得ることを 1 つの目的としていた。また、整関数からなるヒルベルト空間は、フォック空間などのように、ベルグマン空間と同様に面積測度によって定義され、ベルグマン空間と似た構造をもつ部分がある。そのため、フォック空間とベルグマン空間の比較を行うことで(2)の研究からベルグマン空間の巡回ベクトルの良い条件を作れるかについても考えた。

## 3. 研究の方法

ハワイ大学で行われたアメリカ数学会の会議などに参加し、様々な専門家と意見交換を行い、海外の研究者と共同研究を行った。また、これまでに国内外の研究集会などに参加した際に築いた人脈を生かし、ベルグマン空間上の作用素について共同研究を行った。

## 4. 研究成果

(1) 1 変数フォック空間および荷重を乗せた 1 変数フォック型空間については、すでに巡回ベクトルの特徴付けが完全に得られている中で、これらを多変数の空間について研究を行った。本研究ではヒルベルト空間を主目的としているが、 $L^2$  空間だけでなく、対象をバナッハ空間までひろげ  $L^p$  空間についても考察した。一般的にヒルベルト空間は内積が定義されるため、バナッハ空間と比べ扱いやすい部分がある。 $L^2$  空間では多項式が稠密であることは明白であるが、 $L^p$  空間の場合、評価が複雑となる。しかし、フォック型空間の場合、 $L^p$  空間とその荷重にある指数を乗せた  $L^2$  空間がほぼ同じ大きさの空間となる。それを利用することで、必要な評価式を示し、 $L^p$  空間もまた多項式が稠密な空間であることを示した。これは非零な定数関数が巡回ベクトルであることを意味する。これらを用いて、 $L^p$  空間の形のフォック型空間を含め、それらの巡回ベクトルの完全な特徴付けを行った(投稿準備中)。

(2) 正則関数からなるヒルベルト空間において巡回ベクトル, 不変部分空間というとき, 座標関数の掛け算作用素における巡回ベクトルや不変部分空間を指す。2変数ハーディ空間ではネジレのようなものがあるが, それぞれの変数の座標関数の掛け算作用のネジレ方も不変部分空間の構造に伴い, 状況が変化する。その座標関数のネジレを考えるものとしてフリンジ作用素が定義されている。不変部分空間  $M$  に対して, フリンジ作用素  $F_z$  は

$$F_z = P_{M \ominus wM} T_z$$

によって定義される  $M \ominus wM$  上の作用素である。ここで  $T_z$  は  $z$  の掛け算作用を表し,  $P_M$  で  $M$  への正射影を表す。 $M = H^2$  のときは単純に座標関数  $z$  を掛け算する作用素となるが,  $M$  のネジレ方によって  $F_z$  の写し方は変化する。それゆえ  $M$  を調べる上で  $F_z$  の性質を調べることは重要である。このネジレを考察することは巡回ベクトルを考える上でも重要であり, 1変数にはない形の不変部分空間でルーディン型の不変部分空間のフリンジ作用素について考察した。その中で, それらの不変部分空間のフリンジ作用素のランクを特徴付けた (投稿中)。

(3) 作用素の性質を調べるため, 多変数ベルグマン空間上の Toeplitz 作用素について考察した。本研究のテーマである不変部分空間は掛け算作用素に対して不変であるものを扱うが, この座標関数の掛け算作用素もまた Toeplitz 作用素の1つであり, それらの作用素の性質を調べることは巡回ベクトルや不変部分空間を調べる上で重要である。その中で, Toeplitz 作用素のべき乗の作用素列

$$\{(T_\varphi)^k\}, \quad \{(T_\varphi^*)^k\}$$

が任意のベルグマン空間の関数  $f$  に対して,  $k \rightarrow \infty$  のとき

$$(T_\varphi)^k f, \quad (T_\varphi^*)^k f$$

のノルムが 0,  $\infty$  にそれぞれ収束する場合を特徴付けた。またそれらのノルムの和が有限の値になる場合など, いくつかの条件の下での特徴づけを行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Chen Yong, Izuchi Kei Ji, Izuchi Kou Hei, Lee Young Joo	4. 巻 41
2. 論文標題 Sequences of Powers of Toeplitz Operators on the Bergman Space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Scientia	6. 最初と最後の頁 657 ~ 669
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10473-021-0301-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Kou Hei Izuchi
2. 発表標題 Measure zero Rudin type invariant subspaces and ranks of fringe operators
3. 学会等名 Spring Central and Western Joint Sectional Meeting（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	湖南大学	杭州師範大学		
韓国	全南大学校			