

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03338

研究課題名(和文) 尖点をもつリーマン面のモジュライの計量幾何解析

研究課題名(英文) Geometric analysis on metrics of the moduli of punctured Riemann surfaces

研究代表者

小櫃 邦夫 (Obitsu, Kunio)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：00325763

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：代表者は、尖点をもつリーマン面のタイヒミュラー空間のTakhtajan-Zograf 計量について、基本的な性質を明らかにすることを目標とした。今研究課題で主に得られた成果は、タイヒミュラー空間の境界近傍におけるTakhtajan-Zograf 計量の境界挙動評価の改良である。以前の共同研究でなされた結果には主要項の次数にやや不十分な部分が残っていた。そこで、主要項の次数の上からの評価の改良を試みて、最良と予想される次数に改良することに成功した。一方で、主要項の下からの次数の評価については改良できておらず、今後の課題として残った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Takhtajan-Zograf計量は、Weil-Petersson計量のタイヒミュラー空間の境界における漸近展開の第2項として現れることを、2008年にWolpert氏と共同で示したが、この結果はここ数年、何人かの数理物理学者によって注目され、これを応用した超弦理論の研究が進み始めている。これは期待した通りの研究の進展であり、今後ともTakhtajan-Zograf計量の基本的性質を探索していくことは、大いに意義あることと考えられる。

研究成果の概要(英文)：Main goal of this project was that we would reveal fundamental properties of the Takhtajan-Zograf metric on Teichmüller spaces of punctured Riemann surfaces. One of the main results obtained in this project is the improvement of the estimates of asymptotic boundary behaviors of the Takhtajan-Zograf metric near the boundary of Teichmüller spaces. In the results of my previous collaborate research, there remained unsatisfactory estimates of the main terms of the asymptotics of the metric. Then, in the project, we tried to improve the upper bound of degree of the main term and succeeded to get the optimal order estimate. On the other hand, we failed to improve the lower bound of degree of the main term, which remains to improve.

研究分野：複素解析学

キーワード：リーマン面 タイヒミュラー空間 ケイラー計量 漸近挙動 アイゼンシュタイン級数 双曲計量

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

1958年に Weil によって提唱された Weil-Petersson 計量は、リーマン面の Teichmüller 空間上で定義された。Ahlfors, H. Masur, S. Wolpert らによって基本的な性質が明らかにされ、その後 Thurston によって、リーマン面上の双曲的閉測地線のエルゴートの性質による特徴づけが見出され、リーマン面のモジュライを調べる上で非常に重要な道具となっている。最近の Mirzakhani の仕事により、境界付きリーマン面のモジュライ空間の Weil-Petersson 体積は、リーマン面の双曲的閉測地線の長さに関する漸近挙動と極めて密接に関連していることも分かってきた。

2. 研究の目的

代表者は特に尖点(カスプ)をもつリーマン面の双曲幾何学的性質に関心がある。さらに、尖点をもつリーマン面の Teichmüller 空間上の Weil-Petersson 計量と Takhtajan-Zograf 計量と呼ばれるケーラー計量を中心に研究を進めようとしている。リーマン面のモジュライの境界における H. Masur の Weil-Petersson 計量の漸近展開の公式をより改良することを、大きな目標としている。

3. 研究の方法

Wolpert とともに、境界成分に平行な方向について、Weil-Petersson 計量の漸近展開の第 2 項を決定することに成功している(Math. Ann. 341(2008))。さらに高階項を求めることを研究目的に挙げておく。代表者らが見出した漸近展開の第 2 項に現れたのは、尖点をもつリーマン面に対してのみ定義される Takhtajan-Zograf 計量であった。元々は 1988 年 Takhtajan と Zograf によって、リーマン面のモジュライ空間上の指数定理を閉リーマン面の場合から尖点をもつリーマン面の場合に一般化した際に発見されたものである。最近、Mazzeo と Swoboda(Int. Math. Re. Not. (2016))は、閉リーマン面のモジュライ上の Weil-Petersson 計量の漸近展開の形を完全に決定したが、彼らの公式に含まれる項のうち、どの項が実際に現れその他の項が実は現れないか、は未特定のままである。例えば、彼らは代表者と Wolpert が決定した第 2 項を特定できていない。一方、Melrose と X. Zhu が最近の論文(Int. Math. Re. Not. (2017))で、尖点をもつリーマン面のモジュライの境界における Takhtajan-Zograf 計量の漸近展開を第 2 項まで決定したことをアナウンスしている。これは、代表者と W.K. To と L.Weng による Takhtajan-Zograf 計量の漸近展開の初項の評価(Comm. Math. Phys. 284(2008))を、本質的に改良したものである。彼らの公式の証明を理解し、さらに完全な漸近展開を得ることが研究目的であった。Weil-Petersson 計量の境界挙動がすでに驚くほど多くの応用を導いているのと同様、Takhtajan-Zograf 計量の境界挙動を明らかにすることは多くの応用をもつことを指摘したい。一例として、尖点をもつリーマン面のモジュライの Takhtajan-Zograf 計量による完備化を実行すること、またその L^2 -コホモロジーを決定する問題などが挙げられる。

4. 研究成果

代表者は、尖点をもつリーマン面のタイヒミュラー空間の Takhtajan-Zograf 計量について、基本的な性質を明らかにすることを目標とした。今研究課題で主に得られた成果は、タイヒミュラー空間の境界近傍における Takhtajan-Zograf 計量の境界挙動評価の改良である。以前の共同研究でなされた結果には主要項

の次数にやや不十分な部分が残っていた。そこで、主要項の次数の上からの評価の改良を試みて、最良と予想される次数に改良することに成功した。一方で、主要項の下からの次数の評価については改良できておらず、今後の課題として残った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 小櫃邦夫
2. 発表標題 Takhtajan-Zograf計量の最近の進展について
3. 学会等名 東京工業大学複素解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 近藤剛史
2. 発表標題 グラフのラプラシアンと全域森の数え上げ
3. 学会等名 「測地線及び関連する諸問題」（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小櫃邦夫
2. 発表標題 擬等角変分の方法について
3. 学会等名 Beltrami方程式勉強会 II（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 愛甲正
2. 発表標題 Negative vector bundles and complex Finsler geometry
3. 学会等名 23rd International Summer School on Global Analysis and Applications, Brasov, Romania（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 愛甲正
2. 発表標題 One-sided projective changes of Finsler connections
3. 学会等名 第53回フィンスラー幾何学シンポジウム、福岡工業大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 近藤剛史
2. 発表標題 Coxeter 群に対する Wirtinger の不等式の変種
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究集会2018(招待講演) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 近藤剛史
2. 発表標題 Coxeter 群に対する Wirtinger の不等式の変種
3. 学会等名 測地線および関連する諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 近藤剛史
2. 発表標題 Coxeter 群に対する Wirtinger の不等式の変種
3. 学会等名 幾何学と組合せ論2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	愛甲 正 (Aiko Tadashi) (00192831)	鹿児島大学・理工学域理学系・教授 (17701)	
研究 分担者	近藤 剛史 (Kondo Takefumi) (60467446)	鹿児島大学・理工学域理学系・准教授 (17701)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 The Mathematical Legacy of Maryam Mirzakhani	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Workshop on Geometry of Teichmüller Space	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------