

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 13 日現在

機関番号：32638

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03346

研究課題名(和文) ファインなファイバーを持つリーマン対称空間上のベクトル束における調和解析

研究課題名(英文) Harmonic analysis for vector bundles on Riemannian symmetric spaces with fine fibers

研究代表者

織田 寛 (Oda, Hiroshi)

拓殖大学・工学部・教授

研究者番号：20338619

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：ユークリッド空間上の関数を指数関数の和に分解するフーリエ変換の理論は、リーマン対称空間上のベクトル束の切断を「基本球関数」の和に分解する「球変換」に一般化される。球変換に対する基本的な問題は「逆変換公式」と「プランシェレル測度」の決定だが、それらは非常に限られた場合のみ解決していた。研究期間が始まる直前、関西学院大の示野氏と私は、ベクトル束のファイバーが「スモール」という種類である場合に、基本球関数をヘックマンとオプダムの超幾何関数で表す公式を導き、上の問題を解決した。研究期間中我々は、ベクトル束が一階の不変微分作用素を持ち、ファイバーが「ミニスキュル」という種類の場合にその結果を拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

物理系の状態は時空間上の関数ではなく、ベクトルを値に取る関数のようなもの(ベクトル束の切断)で表されることが多い。我々はベクトル束が一階の不変微分作用素を持ち、ファイバーが「ミニスキュル」の場合の調和解析を確立したが、スピンのためのベクトル束はその適用範囲に含まれる(ファイバーはスピン表現でミニスキュル、一階の不変微分作用素はディラック作用素)。一方、ヘックマンとオプダムの超幾何関数およびそれが満たす量子可積分系の理論は十分成熟しているにもかかわらず、これまでほとんど応用がなかった。我々が今回用いた手法により、対称空間の調和解析の結果を導く際、これらの理論が強力なツールになることが示された。

研究成果の概要(英文)：Fourier transforms, which decompose a function on Euclidean spaces into a sum of exponential functions, is generalized to spherical transforms, which decompose a section of vector bundles on Riemannian symmetric spaces into a sum of elementary spherical functions. The two most basic problems on a spherical transform are to present the inversion formula and to determine the Plancherel measure, though the problems had been solved only in some limited cases. Just before this research program started Shimeno (Kwansei Gakuin Univ) and I solved the problems in the cases where the fiber of the vector bundle is classified as 'small.' The method we adopted there is to use a new formula that relates elementary spherical functions to Heckman-Opdam hypergeometric functions. In the research program we extended this result to the cases where the vector bundle has an invariant differential operators of the first order and the fiber of the vector bundle is classified as 'minuscule.'

研究分野：表現論

キーワード：リーマン対称空間 ベクトル束 プランシェレル測度 ヘックマン・オプダム超幾何関数 ミニスキュルKタイプ

1. 研究開始当初の背景

(1) 古典的なフーリエ変換は、リー群 R がユニタリに作用する関数空間 $L^2(R)$ の既約分解である。 G を非コンパクト実半単純リー群、 K をその極大コンパクト部分群とする。リーマン対称空間 G/K 上の調和解析は G がユニタリに作用する $L^2(G/K)$ の既約分解を意味するが、これは 1950~60 年代にハリシュ・チャンドラやヘルガソン等の努力により完成されている。しかし、 $L^2(G/K)$ は表現論的には K の自明表現を G の表現に誘導したものであり、 G の表現のごく一部をカバーしているにすぎない。 K の一般の既約ユニタリ表現(以下「 K タイプ」と呼ぶ) V を G に誘導した表現は、 V をファイバーとする同変ベクトル束 $G \times_K V$ の切断の空間として実現される。 $L^2(G \times_K V)$ の既約分解を求めることは、「基本球関数」という特別な $L^2(G \times_K V)$ の切断がフーリエ変換における指数関数の役割を持つ「球変換」という積分変換に対する逆変換公式を求めることと同等であり、逆変換公式に現れるスペクトルの空間上の測度は「プランシェレル測度」と呼ばれる。個々の $G \times_K V$ に対して複雑な重積分によりプランシェレル測度を計算する一般論は知られているものの、重積分の実行は困難で、ごく最近まで階数が 1 である個々の G/K に対する結果が Camporesi-Pedon, van Dijk-Pasquale, Flensted-Jensen によって、 $\dim V=1$ の場合が Heckman や示野信一氏(関西学院大)によって得られているだけであった。

(2) ルート系ごとに定まる「ヘックマンとオブダムの超幾何関数」は、古典的な $L^2(G/K)$ に対する基本球関数を拡張したものである。つまり、 G/K の幾何学的な構造はルート系と重複度と呼ばれる整数値パラメータ k で決まるが、 $L^2(G/K)$ の基本球関数に陰に含まれる k を任意の複素数値に拡張したものがヘックマンとオブダムの超幾何関数である。 $L^2(G/K)$ に対する球変換は、ヘックマンとオブダムの超幾何関数がフーリエ変換における指数関数の役割を持つ「超幾何フーリエ変換」という積分変換に自然に一般化される。この超幾何フーリエ変換の逆変換公式は、 $k=0$ の場合やルート系が BC 型でない場合はオブダムによって与えられていた。

(3) 当研究課題開始の少し前に、示野氏と私は、 K タイプ V がワラックの定義した意味で「スモール」である場合に、 $L^2(G \times_K V)$ の基本球関数をヘックマンとオブダムの超幾何関数で表す公式を得た。(ただし、 G が G_2 スプリット型で V が \mathbb{Z}_2 というスモール K タイプのときには例外的にそのような公式がない。) その結果、 V が \mathbb{Z}_2 以外のスモール K タイプで、超幾何関数のパラメータ k が 0 のときやルート系が BC 型以外のときには、超幾何フーリエ変換の逆変換公式を使って球変換の逆変換公式とプランシェレル測度を求めることができた。これは従来の重積分を用いる方法とはまったく異なる手法であり、既知の場合をほぼすべて含んでいた。

2. 研究の目的

(1) V が \mathbb{Z}_2 の場合の $L^2(G \times_K V)$ の球変換の逆変換公式とプランシェレル測度を、従来の重積分を用いる方法により求める。

(2) ルート系が BC 型で $k=0$ ではない場合の超幾何フーリエ変換の逆変換公式を求める。

(1)、(2) が完了すればすべてのスモールな V に対して $L^2(G \times_K V)$ の球変換の逆変換公式とプランシェレル測度が得られることになる。

(3) K タイプがスモールなときに 1 - (3) のような手法が可能なのは、基本球関数が満たす微分方程式系の構造が簡単なためである。この微分方程式系がスモールに次いで簡単な構造になる K タイプのクラスとして、「ミニスキュル」というものが自然に定義される。これは、 G がスプリット型の場合にはボーガンが定義した「ファイン」というクラスをやや広くしたものであり、 G が複素半単純群の場合は古典的なミニスキュル表現全体と完全に一致する。このようなファイン K タイプをすべての非コンパクト実半単純リー群 G に対して分類する。

(4) なるべく多くのファイン K タイプ V に対して、 $L^2(G \times_K V)$ の球変換の逆変換公式とプランシェレル測度を求める。

3. 研究の方法

(1) リーによる最近の結果により、 G がスプリット型の場合のスモール K タイプは分類されている。 G が一般の非コンパクト実半単純リー群のときには、それ付随したスプリット部分群 G' がある。そして G のスモール K タイプ V に対してはその自然な部分空間 V' で G' のスモール $K' := K \cap G'$ タイプとなるものが定まる。我々は 1 - (3) においてすべてのスモール K タイプを分類したが、その際 V を V' に還元するこの原理と、リーによるスプリット型の場合の分類結果を主に用いた。 2 - (3) のミニスキュル K タイプの分類においてもこの議論を模して、まず G がスプリット型の場合にボーガンによるファイン K タイプの分類を拡張してミニスキュル K タイプの分類を行い、次に一般の G のミニスキュル K タイプを G' のミニスキュル K' タイプに還元する原理を確立することにより完全な分類をめざした。

(2) ヘックマンとオブダムの超幾何関数にはルート系のワイル群による対称性があるが、オブダムはこの対称性を取り除いた「非対称超幾何関数」を導入した。超幾何フーリエ変換もそれに伴って拡張され「チェレドニク変換」となるが、 $k=0$ の場合の逆変換公式がやはりオブダムに

より得られている．スモール K タイプに対する基本球関数は本質的にワイル群不変なスカラー値関数とみなすことができるが，ミニスキュル K タイプ V に対する基本球関数は，本質的にワイル群の表現空間に値を取る関数であって各成分はワイル群不変ではない．我々は各成分を非対称超幾何関数で表す公式を導き，球変換をチェレドニク変換と結び付け，オプダムの逆変換公式を経由して球変換の逆変換公式とプランシェレル測度を得ることをめざした．

(3) 表現論や解析学の関連する話題について学び，各時点での結果について他の研究者と議論するため，多くの研究集会に参加して発表をした．また，2018年には「第57回実函数論・函数解析学合同シンポジウム」の会場責任者を務め，2020年には廣惠一希氏(千葉大)と共同で「2020年度表現論シンポジウム」を主催した．

4. 研究成果

(1) 示野氏と共同で，スモールに対して得られた結果を論文[雑誌論文(3, 5)]にまとめ，出版した．

(2) $L^2(G/K)$ の既約分解に現れる空間は主系列表現であり，その K 加群としての構造は $\text{Lie}(G)/\text{Lie}(K)$ 上の多項式に対する Kostant-Rallis の変数分離定理から得られる． G が複素単純リー群， V がミニスキュル表現のときに $L^2(G \times_K V)$ に対する主系列の構造を記述する目的で， $\text{Lie}(G)/\text{Lie}(K)$ 上の V 値多項式に対する変数分離定理を確立した[雑誌論文(4)，学会発表(8)]．

(3) 示野氏と共同で， V がミニスキュルで $G \times_K V$ が一階の不変微分作用素を持つ場合をすべて分類し，その場合の基本球関数を非対称超幾何関数で記述する公式を確立し，チェレドニク変換の逆変換公式を用いて球変換の逆変換公式とプランシェレル測度を得た[雑誌論文(1)，学会発表(3, 4, 7)]．

(4) 示野氏と共同で， G が G_2 スプリット型で V が \mathfrak{g}_2 の場合の $L^2(G \times_K V)$ の球変換の逆変換公式とプランシェレル測度を，重積分による c 関数の計算と留数計算により決定した[雑誌論文(2)，学会発表(5)]．

(5) G がスプリット型の場合にミニスキュル K タイプを分類し[学会発表(6)]， G が一般の非コンパクト実単純リー群の場合も3 - (1)の手法により2系列の G を除いてミニスキュル K タイプの分類を完了した[学会発表(2)]．

(6) 示野氏と本田龍央氏と共同で，ルート系が BC 型で $k \neq 0$ ではない場合の超幾何フーリエ変換の逆変換公式を導き，プレプリントにまとめた[その他(3)，学会発表(1)]．

[雑誌論文](計5件)

- (1) 織田寛，示野信一，ミニスキュル K タイプに対する球関数と Heckman-Opdam 超幾何関数，2019 年度表現論シンポジウム講演集，査読無，2019，57-86，DOI: 10.34508/repsympo.2019.0_57
- (2) Hiroshi Oda and Nobukazu Shimeno, Spherical inversion for a small K -types on the split real Lie group of type G_2 , Josai Mathematical Monographs, 査読有，Vol.12, 2020, 81-98, DOI:10.20566/13447777_12_81
- (3) Hiroshi Oda and Nobukazu Shimeno, Spherical Functions for Small K -Types, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有，Vol.290, 2019, 121-168, DOI: 10.1007/978-3-030-26562-5_6
- (4) 織田寛，A vector-valued version of Kostant's separation of variables theorem, 京都大学数理解析研究所考究録，査読無，2103 巻，2019，90 - 108, <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2103-08.pdf>
- (5) 織田寛，示野信一，Small K -タイプに付随した Riemann 対称空間上のベクトル束における球変換，京都大学数理解析研究所考究録，査読無，2077 巻，2018，79 - 97, <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2077-09.pdf>

[学会発表](計8件)

- (1) 織田寛，示野信一，本田達央，Hypergeometric Fourier transform associated with a root system of type BC ，日本数学会 2020 年度年会函数解析学分科会，2020 年
- (2) Hiroshi Oda, Classification of minuscule K -types, 6th Tunisian-Japanese Conference 'Geometric and Harmonic Analysis on homogeneous spaces and Applications, in Honor of Professor Takaaki Nomura', 2019 年
- (3) 織田寛，示野信一，ミニスキュル K タイプに対する球関数と Heckman-Opdam 超幾何関数，2019 年度表現論シンポジウム(招待講演)，2019 年
- (4) Hiroshi Oda, Spherical functions for small-dimensional K -types, 研究集会「Representation theory of reductive Lie groups and algebras (in honor of Hisayosi Matumoto on the occasion of his 60th birthday)」(招待講演)，2019 年
- (5) 織田寛，示野信一， G_2 型の実 split Lie 群の small K -type に対する球変換，日本数学会 2019 年度年会函数解析学分科会，2019 年
- (6) 織田寛，Classification of minuscule K -types for real split simple Lie groups, 研究集会「2018 年度表現論ワークショップ」，2019 年

- (7) 織田寛, 行列値球関数 (不変微分作用素環が 1 階作用素を含む場合), 研究集会「微分方程式と表現論 大島利雄先生古希記念研究集会」(招待講演), 2018 年
- (8) 織田寛, 複素簡約 Lie 環上のベクトル値多項式に対する変数分離定理, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会函数解析学分科会, 2018 年

[その他] (計 4 件)

- (1) 織田寛, 廣惠一希, 「2020 年度表現論シンポジウム講演集」編集, 182 頁
- (2) 織田寛, 廣惠一希, 「2020 年度表現論シンポジウム」主催, 2020 年 11 月 19 日 ~ 22 日, <https://sites.google.com/view/hyougenron-symp-2020>
- (3) Tatsuo Honda, Hiroshi Oda, Nobukazu Shimeno, Inversion formula for the hypergeometric Fourier transform associated with a root system of type BC, プレプリント, 2020, <https://arxiv.org/abs/2007.08281>
- (4) 織田寛, 「第 57 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム」会場責任者, 2018 年 9 月 3 日 ~ 5 日

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hiroshi Oda and Nobukazu Shimeno	4. 巻 290
2. 論文標題 Spherical Functions for Small K-Types	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 121-168
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-26562-5_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Oda and Nobukazu Shimeno	4. 巻 12
2. 論文標題 Spherical inversion for a small K-type on the split real Lie group of type G2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Josai Mathematical Monographs	6. 最初と最後の頁 81-98
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.20566/13447777_12_81	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 織田寛, 示野信一	4. 巻 2019年度
2. 論文標題 ミニスキュル K タイプに対する球関数と Heckman-Opdam 超幾何関数	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 表現論シンポジウム講演集	6. 最初と最後の頁 57-86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.34508/rep-sympo.2019.0_57	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 織田寛, 示野信一	4. 巻 2077
2. 論文標題 Small K-タイプに付随したRiemann対称空間上のベクトル束における球変換	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 79-97
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 織田寛	4. 巻 2103
2. 論文標題 A vector-valued version of Kostant's separation of variables theorem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 90-108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 織田寛, 示野信一
2. 発表標題 ミニスキュル K タイプに対する球関数と Heckman-Opdam 超幾何関数
3. 学会等名 2019年度表現論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 示野信一, 織田寛
2. 発表標題 minuscule K-type に対する球変換 (1階不変微分作用素がある場合)
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会函数解析学分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Oda
2. 発表標題 Classification of minuscule K-types
3. 学会等名 6th Tunisian-Japanese Conference (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 織田寛
2. 発表標題 複素簡約Lie環上のベクトル値多項式に対する変数分離定理
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会函数解析学分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 織田寛
2. 発表標題 行列値球関数 (不変微分作用素環が1階作用素を含む場合)
3. 学会等名 研究集会「微分方程式と表現論 - 大島利雄先生古希記念研究集会 - 」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 織田寛
2. 発表標題 Classification of minuscule K-types for real split simple Lie groups
3. 学会等名 研究集会「2018年度表現論ワークショップ」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 織田寛, 示野信一
2. 発表標題 G2型の実 split Lie 群の small K-type に対する球変換
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会函数解析学分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Oda
2. 発表標題 Spherical functions for small-dimensional K-types
3. 学会等名 研究集会「Representation theory of reductive Lie groups and algebras」(招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Symposium on Representation Theory 2020	開催年 2020年～2020年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------